Quelques problèmes à l'interface Géométrie-Mécanique

Jean LERBET

Institut Navier, LAMI, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

EPU Tours, DP

lerbet@univ-tours.fr

Plan de l'exposé

- I Introduction
- II Groupes de Lie et cinématique des systèmes
- III Groupes de Lie et génération automatique des équations de la dynamique
- IV Stabilité sous chargement non conservatif
- V Conclusion

I Introduction

- Singularités des chaines cinématiques
- Génération automatique des équations de la dynamique
- Stabilité des systèmes: stabilités statique et dynamique

$$\Downarrow$$

- Théorie des groupes de Lie
- Théorie des singularités d'applications
- Systèmes dynamiques et géométrie (symplectique, riemanienne, ...)

II Groupes de Lie et cinématique des systèmes

- cinématique $\overset{\text{dualité}}{\Rightarrow}$ dynamique

- espace des configurations d'un solide

$$\Downarrow$$

espace homogène $\mathbf{S}$ sans point fixe opéré par $\mathbb{D}$ (groupe de Lie)

$$\Downarrow$$

calcul différentiel intrinsèque dans $\mathbf{S}$ ou dans $\mathbb{D}$ (aspects lagrangien ou eulérien)

$$\Downarrow$$

formation des objets de la mécanique (déplacements, vitesses, accélérations, déformations,. . .) sans introduire de repères, des bases ou des coordonnées

Généralisation aux systèmes (liaison $\Leftrightarrow$ sous-groupe de $\mathbb{D}$)

$$\Downarrow$$

chaine cinématique $\Leftrightarrow$ famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de vecteurs de l'algèbre de Lie

$$\Downarrow$$

configuration quelconque $\Leftrightarrow$ famille $Y_1(q), \ldots, Y_n(q)$ telle que pour tout $k = 1, \ldots, n$:

$$Y_k(q) = Ad(\exp(q_1) \circ \ldots \circ \exp(q_k))X_k$$

$$\Downarrow$$

configuration singulière $\Leftrightarrow$ $q = (q_1, \ldots, q_n)$ tel que rang $(Y_1(q), \ldots, Y_n(q))$ non maximal

Ce qui a été fait: théorie des mécanismes

- Etude de $V = \{q \mid \exp(q_1 X_1) \circ \ldots \circ \exp(q_n X_n) = id\}$

- Théorie des singularités d'applications différentiables

$$\Downarrow$$

- Théorèmes de transversalité

- Géométrie analytique: calcul du cone tangent $C_0 V$ à une singularité (en 0):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k X_k = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{l<k} x_k x_l [X_l, X_k] \in F$$

  linéaire (espace vectoriel) $\rightarrow$ non linéaire (algèbre de Lie)

- Classification exhaustive des singularités

Bilan

Calcul dans un groupe de Lie + Théorie des singularités

$$\Downarrow$$

résolution d'un vieux problème (100 ans)

Problèmes ouverts types

- Classification des singularités des robots parallèles

$$\Downarrow$$

intersections de singularités

- Prise en compte des jeux dans les liaisons

$$\Downarrow$$

déformation de singularités

III Groupes de Lie et génération automatique des équations

calcul intrinsèque des objets de la cinématique

dualité $\Downarrow$ (comoment)

efforts: vecteurs du dual de l'algèbre de Lie,

inertie: opérateur de l'algèbre de Lie

$\Downarrow$

écriture intrinsèque et explicite des équations de la dynamique

$+$

repères de l'espace $\Leftrightarrow$ bases de l'alg. de Lie

$\Downarrow$

calcul matriciel $\rightarrow$ calcul formel

$\Downarrow$

génération automatique des équations (et même traitement numérique)

Ce qui a été fait: milieux curvilignes

- Modèle général $(\sigma, t) \mapsto D(\sigma, t)$

- équations intrinsèques

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{T}^c & = & \rho H_r(\dot{v}^c) + [v^c, \rho H_r(v^c)] \\ & & -[e^c, \Theta^c] - \frac{\partial \Theta^c}{\partial \sigma} \\ \mathcal{T}_0^c = \Theta^c(0) & , & \mathcal{T}_l^c = -\Theta^c(l) \end{array}}$$

- algèbre de dimension 6 $\Rightarrow$ 6 EDP incalculables à la main

Bilan

Calcul dans un groupe de Lie

$$\Downarrow$$

écriture des équations intrinsèques et explicites (1 par solide ou PPV)

Quelques voies possibles

- logiciel intelligent de génération des équations des systèmes $\Rightarrow$ utiliser les règles de calcul et de simplification dans les algèbres de Lie

- intégration numérique des non-linéarités $\Rightarrow$ formule de Campbell-Hausdorf

III Stabilité sous chargement non conservatif

- Structure Linéaire Elastique
- Efforts quelconques, λ paramètre de chargement
- Dimension finie

$$\Downarrow$$

$$M\ddot{X} + K(\lambda)X = 0$$

M symétrique > 0, $K(\lambda)$ quelconque

$\Rightarrow$ Stabilité de la position 0 ?

Bilan

1) cas conservatif ($K(\lambda)$ symétrique)

critère statique: stabilité si $det(K(\lambda) > 0$
critère dynamique: (faible) stabilité si racines de $det(-\omega^2 M + K(\lambda)) = 0$ réelles > 0

$$\Downarrow$$

si le système est conservatif ($K(\lambda)$ symétrique),les deux critères coïncident et l'instabilité est obtenue pour $det(K(\lambda)) = 0$

$$\Downarrow$$

Trois conséquences cruciales

- critère indépendant de la répartition de masse

- stabilité de la structure $\rightarrow$ stabilité de toute sous-structure

- dissipation $\rightarrow$ stabilité de la structure

2) cas non conservatif (dissipatif ou pas)

linéaire

$\Downarrow$

analyse spectrale $\rightarrow$ critère de Routh-Hurwitz

- critère dépendant de la répartition de masse

- stabilité de la structure $\not\rightarrow$ stabilité de toute sous-structure

- dissipation $\not\rightarrow$ stabilité de la structure

$\Downarrow$

critère dynamique meilleure que critère statique

3) non linéarité

- systèmes dynamiques

- géométrie symplectique

Un petit exemple simple: Force suiveuse

$\lambda = F$ et $K = K(\theta_1, \theta_2, F)$ avec

$$K = \begin{pmatrix} 2k - Fl\cos(\theta_2 - \theta_1) & -k + Fl\cos(\theta_2 - \theta_1) \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$det(K(\theta_1, \theta_2, F)) = k^2 > 0 \Rightarrow$ **échec** du critère statique

$\Rightarrow$ structure statiquement stable $\forall F$!?

$$\Downarrow$$

Instabilité dynamique

apparition de l'instabilité $\Leftrightarrow$ fréquence double (flottement)

Influence de la répartition des masses

- (Bamberger) pour une distribution de masse uniforme: $\beta = 2.54$

- (Son,Ziegler) pour deux masses concentrées identiques m au milieu des deux barres: $\beta = 3$

- pour deux masses concentrées identiques m en A_1 et A_2: $\beta = 2$

stabilité des sous-structures

cas $\theta_2 = 0$ l'instabilité statique $\Leftrightarrow$ instabilité dynamique $\Rightarrow \beta = 2$

$$\Downarrow$$

(masse répartie) $2 < \beta < 2.54$ structure stable mais sous-structure instable!!!

proposition

Nouveau critère statique: la structure est statiquement stable si $K(\lambda)$(non symétrique) définie positive (perturbation mixte de l'équilibre)

$$\Downarrow$$

- plus d'échec du critère statique
- exemple force suiveuse: $F_s < F_d$
- pas de problème de stabilité (statique) de sous-structures
- lien partiel avec la stabilité dynamique: $K(\lambda)$ est définie positive$\rightarrow$ coefficients de $det(xM + K(\lambda)) > 0$

Problèmes ouverts types

- géométrisation du concept de perturbation mixte
- lien critères statique et dynamique
- lien nouveau critère statique et non-linéaire
- perturbation antisymétrique d'un opérateur
- géométrisation des forces non conservatives: connexion avec torsion,. . . ?

IV Conclusion

- cinématique: théorie des singularités + groupes de Lie
- dynamique : calculs formel et numérique + groupes de Lie
- stabilité: géometrie, systèmes dynamiques +nouveau critère $\Rightarrow$ partie symétrique K_s de K