Analyse Multifractale et Application à un Modèle d'Univers en Expansion

E. Leguierriec, B.N. Miller, J.L. Rouet

... in progress ...

Analyse fractale et multifractale de données de simulations numériques d'un modèle d'univers en expansion

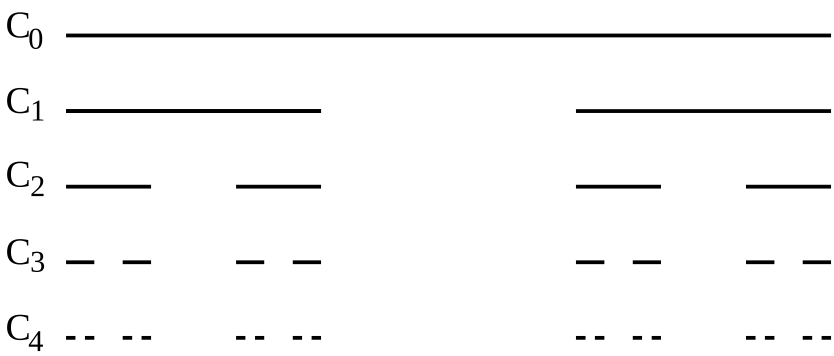
Sommaire

- Exemple d'évolution
- Fractale et multifractals
- Le modèle et simulations numériques
- Analyse fractale des données et résultats

Fractales et Multifractales

Fractale : *objet auto-semblable à toute échelle*

Exemple : ensemble triadic de Cantor

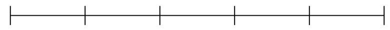


Après sa popularisation par Mandelbrot, on a vu des fractales partout :

- arbres, choux-fleurs,...
- côtes de Bretagne, Norvège,....
- cours de la bourse
- répartition de la matière visible de l'univers.

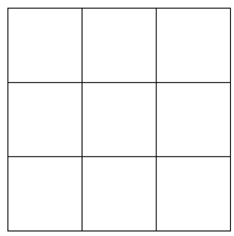
Dimension fractale

C'est une extension de la notion de dimension. Avec les objets habituels (segment unité, carré de surface 1 et cube de volume 1).



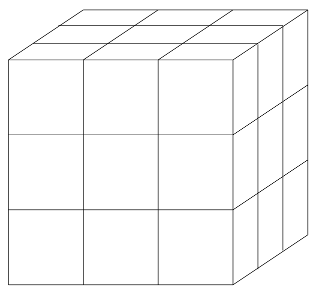
on divise le segment selon M parties dont chacune est auto-similaire au segment initial, le rapport d'échelle étant $r = 1/M^1$, on a

$$M\,r^1 = 1$$



on divise le carré selon M carrés dont chacun est auto-similaire au carré initial, le rapport d'échelle des longueurs étant $r = 1/M^{1/2}$, on a

$$M\,r^2 = 1$$



on divise le cube selon M cubes dont chacun est auto-similaire au cube initial, le rapport d'échelle des longueurs étant $r = 1/M^{1/3}$, on a

$$M\,r^3 = 1$$

Généralisation :

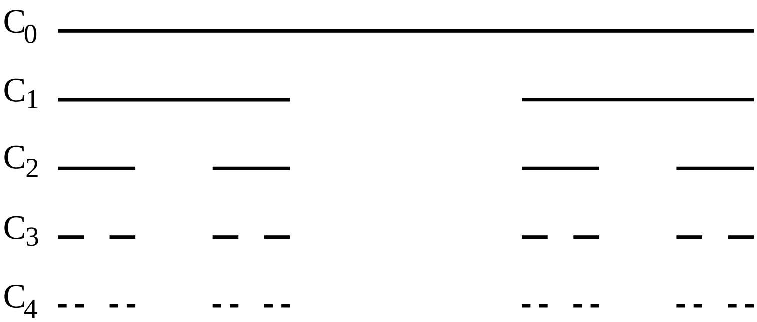
pour une fractal auto-semblable où M est le nombre de répliques auto-semblables ayant un rapport d'échelle r avec l'original on a

$$M\, r^D = 1$$

La valeur D est la dimension de Hausdorff avec

$$D = \frac{\log M}{\log 1/r}$$

Application à la poussière de Cantor :



$M = 2$, $r = 1/3$

$$D = \frac{\log M}{\log 1/r} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63$$

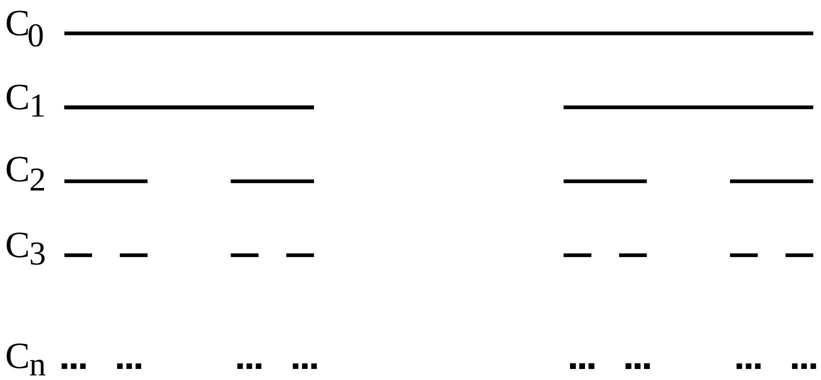
Méthode pratique : "Box Counting"

On compte le nombre $N(l)$ de segments de longueur l nécessaire pour recouvrir l'objet. On définit

$$D_0 = \lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln 1/l}$$

D_0 : "Box counting dimension" ou capacité de l'ensemble

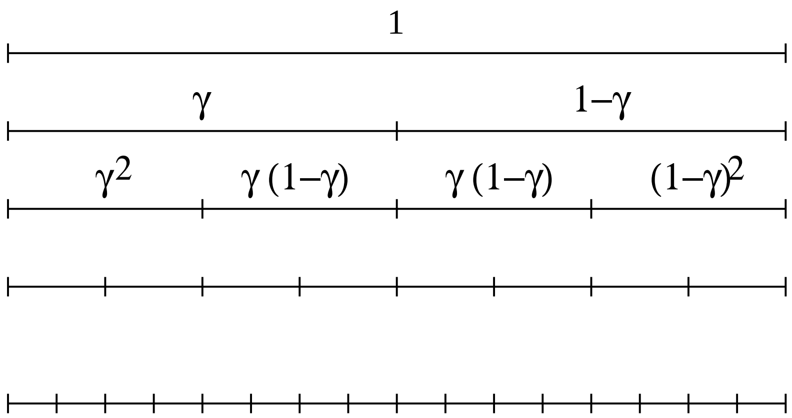
Exemple : ensemble triadic de Cantor



étape	l	N(l)
0	1	1
1	1/3	2
2	1/9	4
3	1/27	8
n	$1/3^n$	2^n

$$D_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = 0.63$$

Autre exemple : fractal multiplicatif ("binomial multiplicative process")



étape	l	N(l)
0	1	1
1	1/2	2
2	1/4	4
3	1/8	8
n	$1/2^n$	2^n

$$0 < \gamma < .5$$

$$D_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 2^n} = 1$$

$\rightarrow D_0$ n'est pas suffisant pour décrire le fractal multiplicatif

Spectre Fractal

Pour tenir compte du poids de chaque cellule, on introduit :

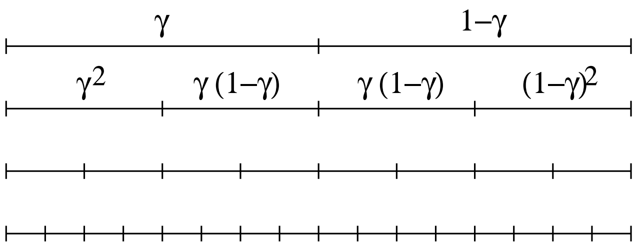
$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{l \to 0} \frac{\ln I(q,l)}{\ln 1/l} \quad \text{avec} \quad I(q,l) = \sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i^q$$

On introduit aussi $\tau_q = (1-q)D_q$ tel que

$$\tau_q = \lim_{l \to 0} \frac{\ln I(q,l)}{\ln 1/l} \quad \text{soit} \quad I(q,l) \sim l^{-\tau_q}$$

- $q = 0$ donne D_0
- $q = 1$ on a $D_1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i \ln(\mu_i)$

Spectre fractal du fractal multiplicatif



étape	l	N(l)
0	1	1
1	1/2	2
2	1/4	4
3	1/8	8
4	1/16	16

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

À l'étape n

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j \gamma^{n-j}(1-\gamma)^j = [\gamma + (1-\gamma)]^n = 1 \longrightarrow \text{conservation de la masse}$$

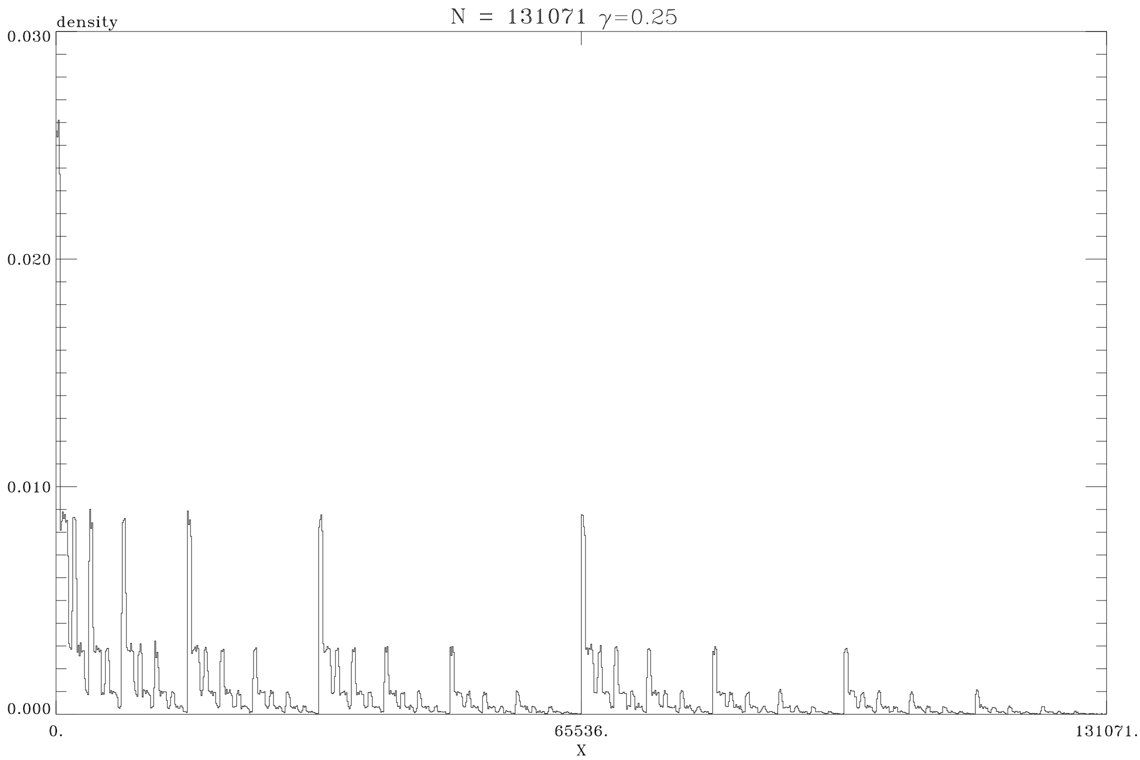
et $\quad I(q,l) = \sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \gamma^{(n-j)q}(1-\gamma)^{jq} = [\gamma^q + (1-\gamma)^q]^n$

d'où $\quad D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln I(q,l)}{\ln 1/l} = \frac{1}{1-q} \frac{\ln(\gamma^q + (1-\gamma)^q)}{\ln 2}$

pour $q = 0$ on retrouve $D_0 = \frac{ln2}{\ln 2} = 1$

Fractal multiplicatif et particules

- M particules au total
- on divise le segment jusqu'à l'étape n telle que $M(1-\gamma)^n = 1$ (1 particule sur le moins dense des segments)
- les particules sont reparties au hasard, selon un loi uniforme, sur chaque segment. Leur nombre est proportionnel au poids de chaque segment.

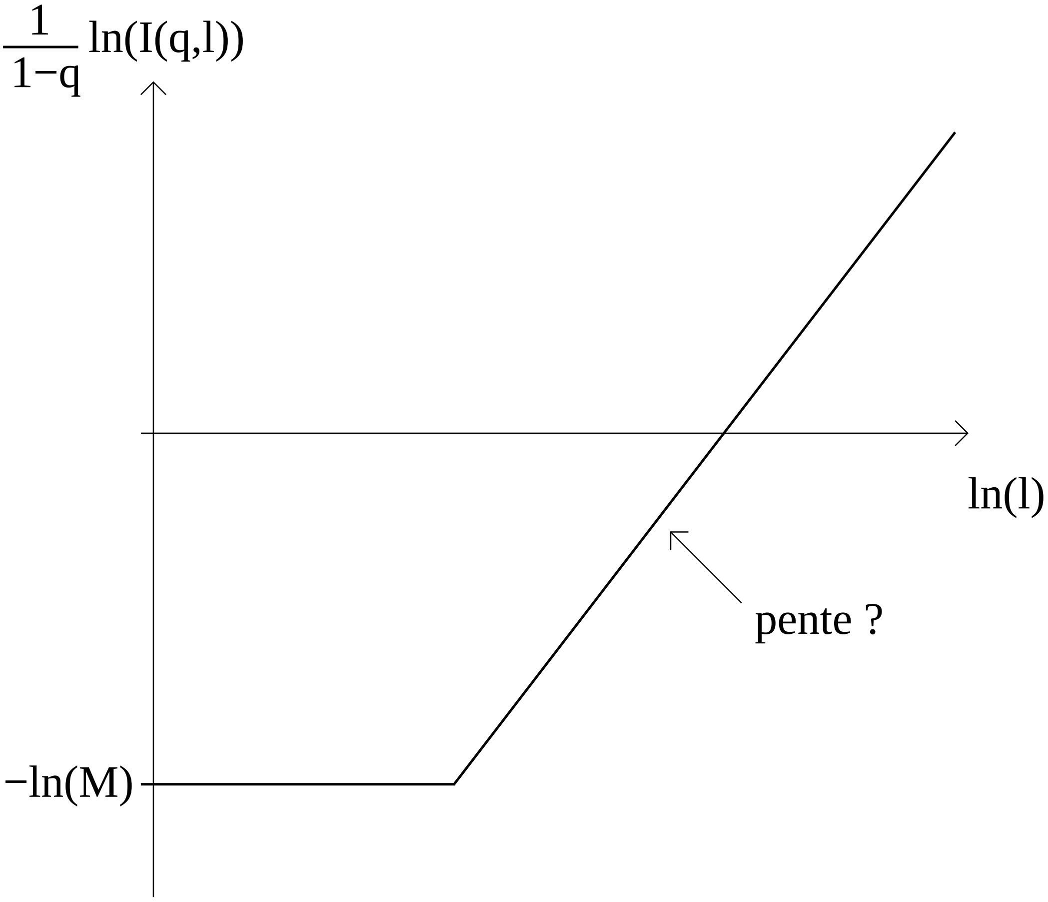


Recherche d'une zone linéaire dans le graphe $\ln(l), \frac{1}{1-q}\ln(I(q,l))$

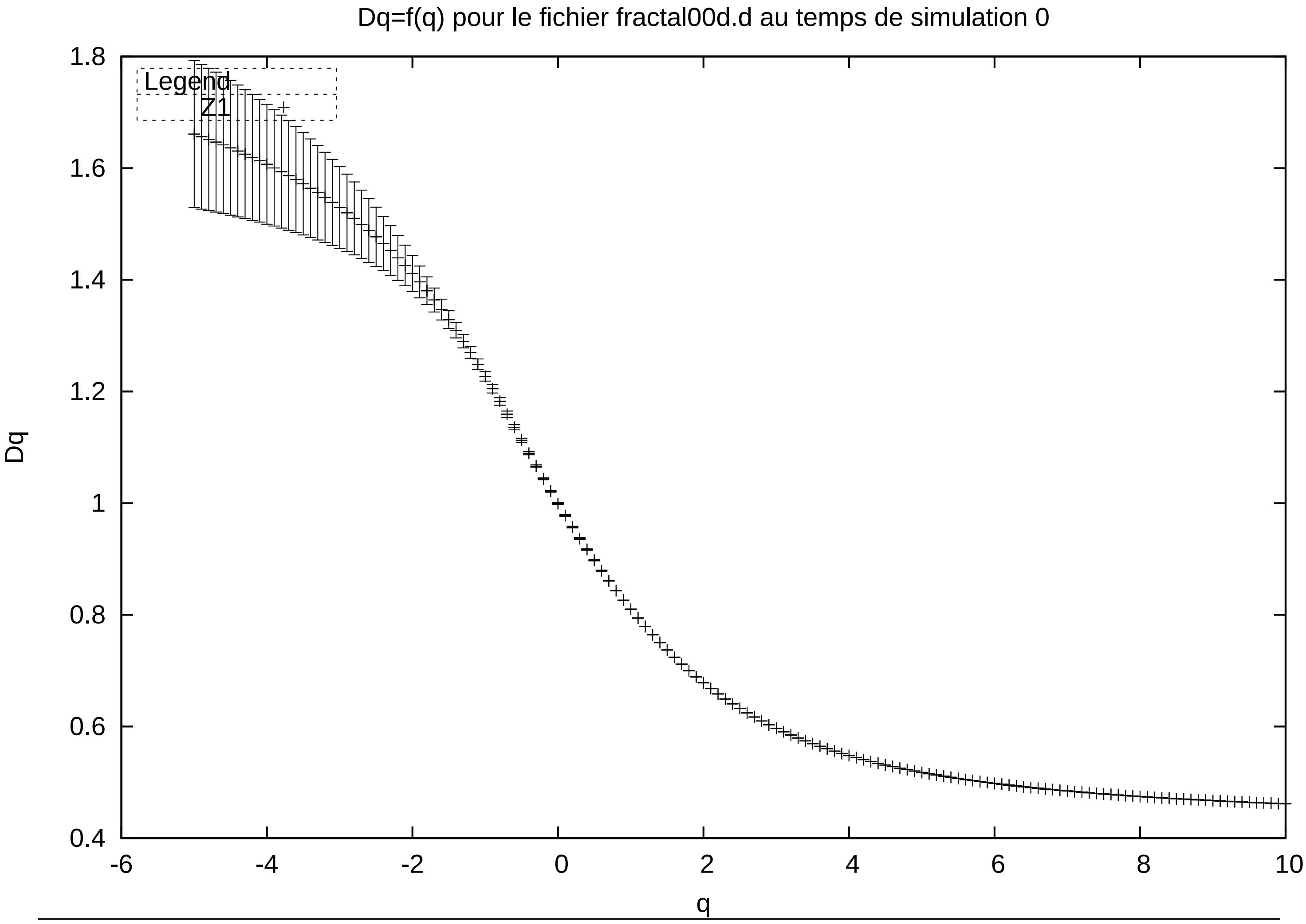
Remarque : limite $l \to 0$:

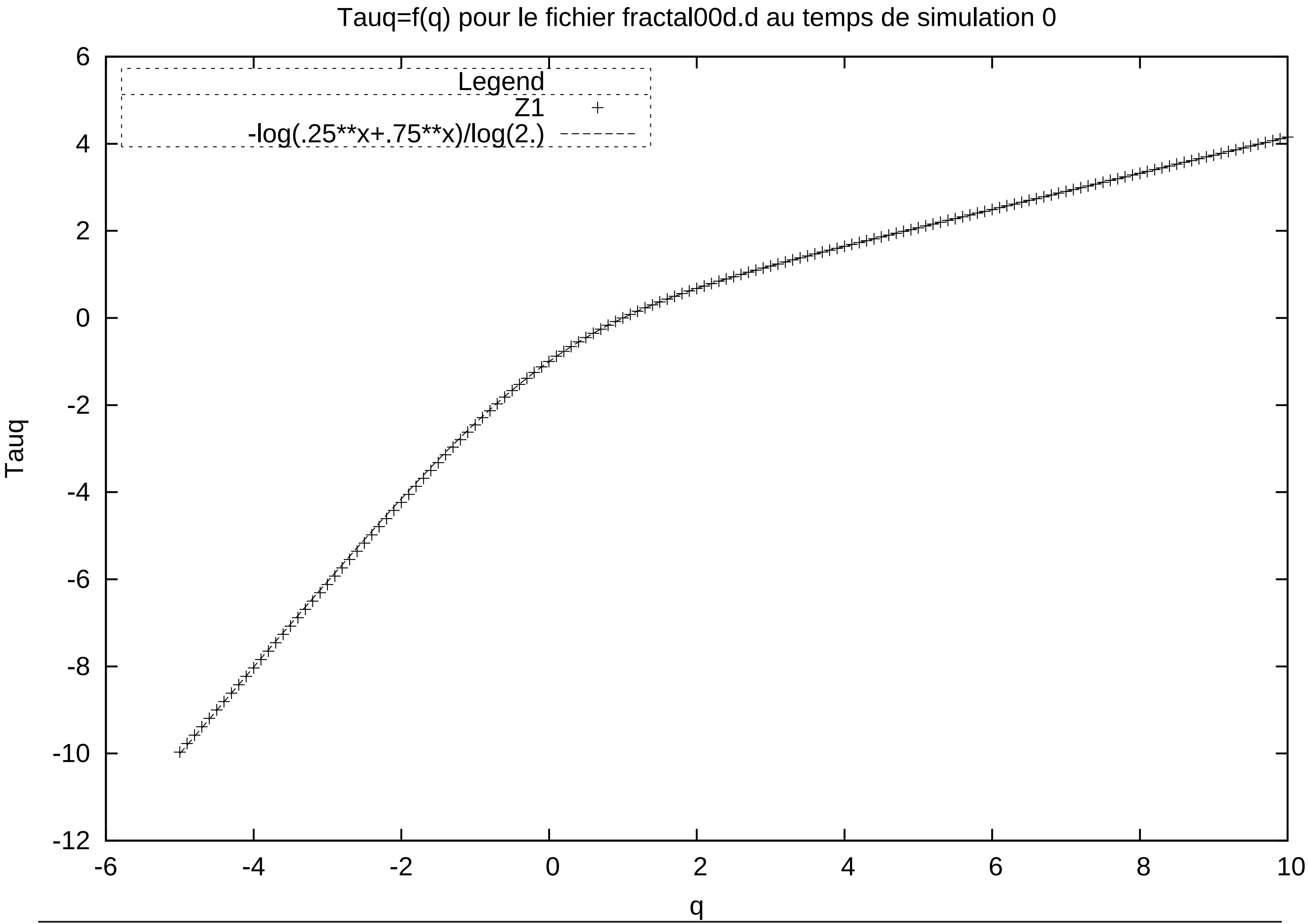
$$N(l) = M \quad \text{et} \quad I(q, l \to 0) = \sum_{i=1}^{N(l)} \mu_i^q = M \left[\frac{1}{M}\right]^q = M^{1-q}$$

ainsi : $\quad \dfrac{1}{1-q} \ln(I_q, l \to 0) = \ln(M)$ indépendant de l



```
gnuplot fractal zl q.gnu
```


Dq=f(q) pour le fichier fractal00d.d au temps de simulation 0
Legend
Z1
Dq
q
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10



Tauq=f(q) pour le fichier fractal00d.d au temps de simulation 0
Legend
Z1
-log(.25**x+.75**x)/log(2.)
Tauq
q
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

Sous-ensemble fractal S_ξ, $\xi = k/n$

On limite l'étude aux seuls segments de mesure $\mu_k = \gamma^{n-k}\gamma^k$ à l'étape n

On calcule la dimension $D_{0,k}$ de cet ensemble :

$N(k,n) = C_n^k$: nombre de boites pour recouvrir S_ξ

Dans la limite $\begin{cases} n & \rightarrow & \infty \\ k & \rightarrow & \infty \end{cases}$ mais $\quad \xi = \dfrac{k}{n}$ fixé

$$
\begin{aligned}
N(k,n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n\xi(1-\xi)}} \exp\left[-n(\xi \ln(\xi) + (1-\xi)\ln(1-\xi))\right] \\
&\sim l^{\xi \ln(\xi) + (1-\xi)\ \ln(1-\xi)}
\end{aligned}
$$

d'où $$D_{0,\xi} = -\frac{\xi \ln(\xi) - (1-\xi)\ \ln(1-\xi)}{\ln 2}$$

Chaque sous-ensemble S_ξ est un fractal d'où le terme multi-fractal

Indice α et dimension multifractale $f(\alpha)$

On regarde l'ensemble des cellules telles que

$$\mu_k = A(\alpha)\left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{\alpha} \sim l^{\alpha}$$

On suppose que le nombre de cases dont l'indice est dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + \mathrm{d}\alpha]$ s'écrit :

$$\rho(\alpha)\left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{-f(\alpha)} \mathrm{d}\alpha$$

alors

$$I(q,l) = \int \rho(\alpha)\left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{-f(\alpha)} A^q(\alpha)\left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{\alpha q} \mathrm{d}\alpha = \int \rho(\alpha) A^q(\alpha)\left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{\alpha q - f(\alpha)} \mathrm{d}\alpha$$

- Pour $l << \Lambda$, $\quad I(q,l) \sim l^{\min_\alpha(\alpha q - f(\alpha))}$ et $\quad \tau_q = \min_\alpha(\alpha q - f(\alpha))$

Indice α et dimension multifractale $f(\alpha)$

On regarde l'ensemble des cellules telles que

$$\mu_k = A(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{\alpha} \sim l^{\alpha}$$

On suppose que le nombre de cases dont l'indice est dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + \mathrm{d}\alpha]$ s'écrit :

$$\rho(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{-f(\alpha)} \mathrm{d}\alpha$$

alors

$$I(q,l) = \int \rho(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{-f(\alpha)} A^q(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{\alpha q} \mathrm{d}\alpha = \int \rho(\alpha) A^q(\alpha) \left[\frac{l}{\Lambda}\right]^{\alpha q - f(\alpha)} \mathrm{d}\alpha$$

- Pour $l << \Lambda$, $\quad I(q,l) \sim l^{\min_\alpha(\alpha q - f(\alpha))}$ et $\quad \tau_q = \min_\alpha(\alpha q - f(\alpha))$
- Pour $l >> \Lambda$, $\quad I(q,l) \sim l^{\max_\alpha(\alpha q - f(\alpha))}$ et $\quad \tau_q = \max_\alpha(\alpha q - f(\alpha))$

Modèle

Univers

- à symétrie sphérique,
- suivant l'expansion de Hubble,
- dont le centre d'expansion coïncide avec le point de symétrie.

Équation du mouvement d'une particule à distance r du centre :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M(r)}{r^2}$$

Redimensionnement

On introduit les fonctions arbitraires $A(t)$ et $C(t)$:

$$\begin{aligned} r &= C(t)\hat{r} \\ dt &= A^2(t)d\hat{t} \end{aligned}$$

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2\hat{r}}{d\hat{t}^2} + 2A(t)^2\left(\frac{C'(t)}{C(t)} - \frac{A'(t)}{A(t)}\right)\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} + \frac{A^4(t)C''(t)}{C(t)}\hat{r} = -\frac{A^4(t)}{C^3(t)}\frac{GM}{\hat{r}^2}$$

Choix de $A(t)$ et $C(t)$

$\rightarrow\ A = C$

$$\frac{d^2\hat{r}}{d\hat{t}^2} + C^3(t)C''(t)\hat{r} = -C(t)\frac{GM}{\hat{r}^2}$$

Avec $C \sim t^{1/2}$ le coefficient du nouveau terme de force est constant mais la force d'attraction dépend du temps

$\rightarrow$ $C(t) \sim t^{2/3}$ et $A(t) \sim t^{1/2}$

$$\begin{aligned} A(t) &= (l + \Omega t)^{1/2} \\ C(t) &= (l + \Omega t)^{2/3} \end{aligned}$$

on a

$$\frac{d^2\hat{r}}{d\hat{t}^2} + \frac{\Omega}{3}\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} - \frac{2}{9}\Omega^2\hat{r} = -\frac{GM}{\hat{r}^2}$$

Ω est choisit de sorte la nouvelle force compense exactement la force d'attraction gravitationnelle :

$$-\frac{2}{9}\Omega^2\hat{r} = -\frac{GM}{\hat{r}^2} \Rightarrow \Omega^2 = \frac{3}{2}\omega_J^2$$

L'équation devient :

$$\frac{d^2\hat{r}}{d\hat{t}^2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_J\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} - \frac{1}{3}\omega_J^2\hat{r} = -\frac{GM}{\hat{r}^2}$$

En chaque point le champ gravitationnel est compensé par le champ introduit par le redimensionnement proportionnel à r : interprété comme dû à un fond fixe neutralisant et homogène de particules de masse négative.

Perturbation plane

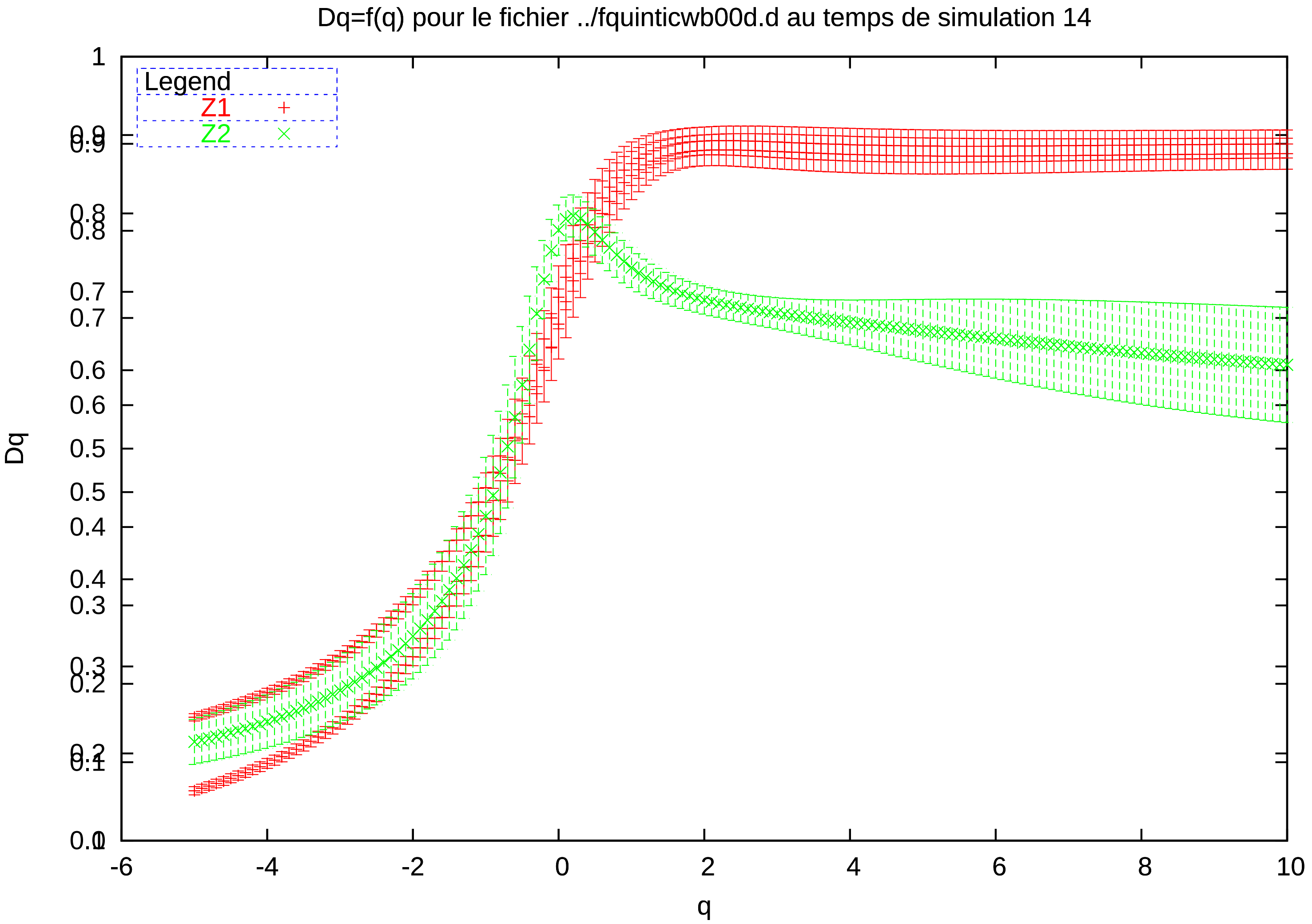
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_j \frac{dx}{dt} - \omega_j^2 x = E(x)$$

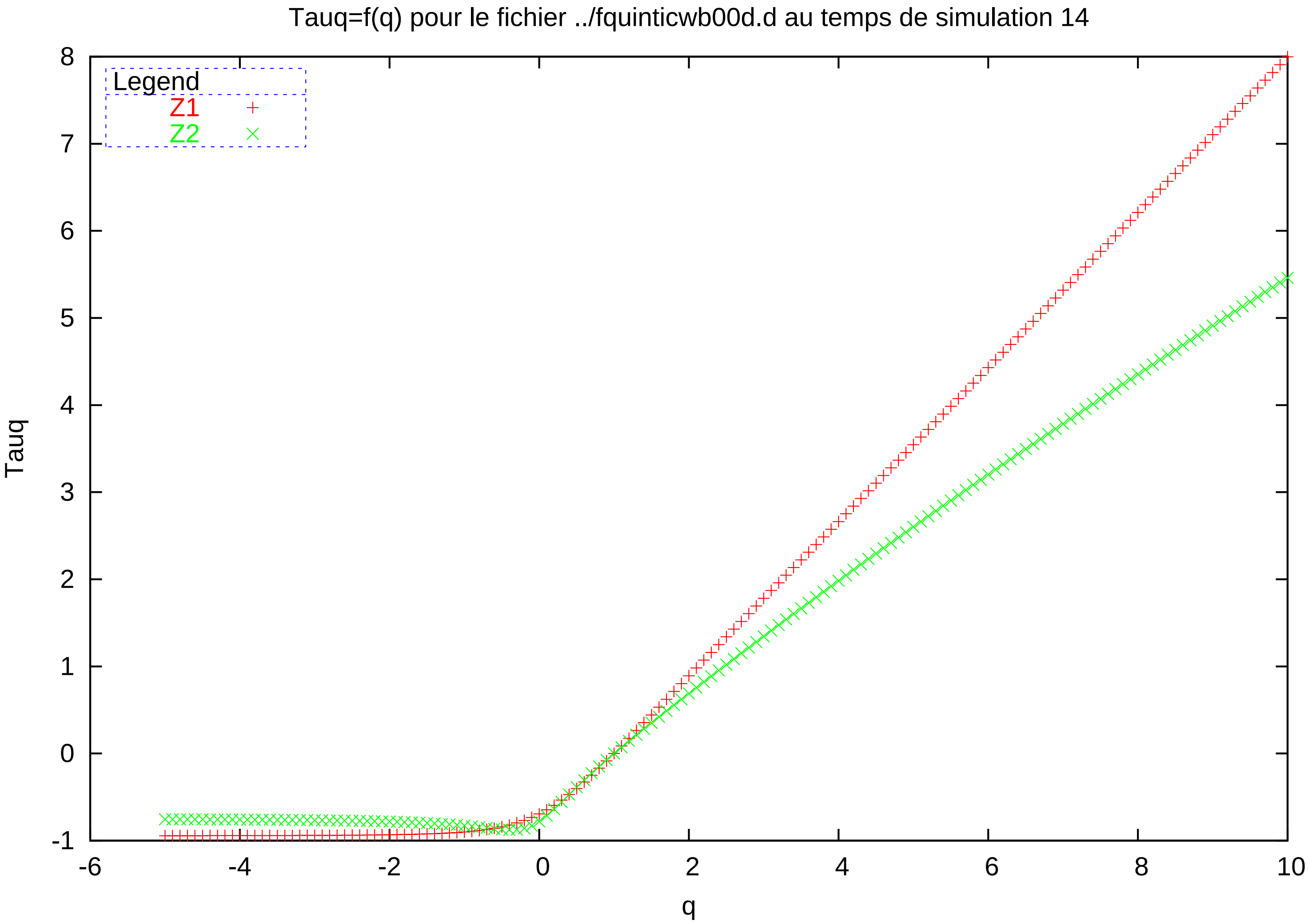
Système 1D de particules qui s'attirent dans un fond fixe neutralisant et homogène répulsif (avec en plus une force de friction) : c'est un anti-plasma $\rightarrow$ système instable.

Simulation numérique

- Integration des équations du mouvement
- Code N-corps exact
- rôle : garder la relation d'ordre entre les particules
- Longueur du système L grande devant la longueur de Jean λ_J.
- Normalisation $L = N$, $\omega_J = 1$
- Condition initiale :
  - densité constante
  - vitesse tirée dans une distribution uniforme

```
gnuplot quintic zl q.gnu
```


Dq=f(q) pour le fichier ../fquinticwb00d.d au temps de simulation 14
Legend
Z1
Z2
Dq
q
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0

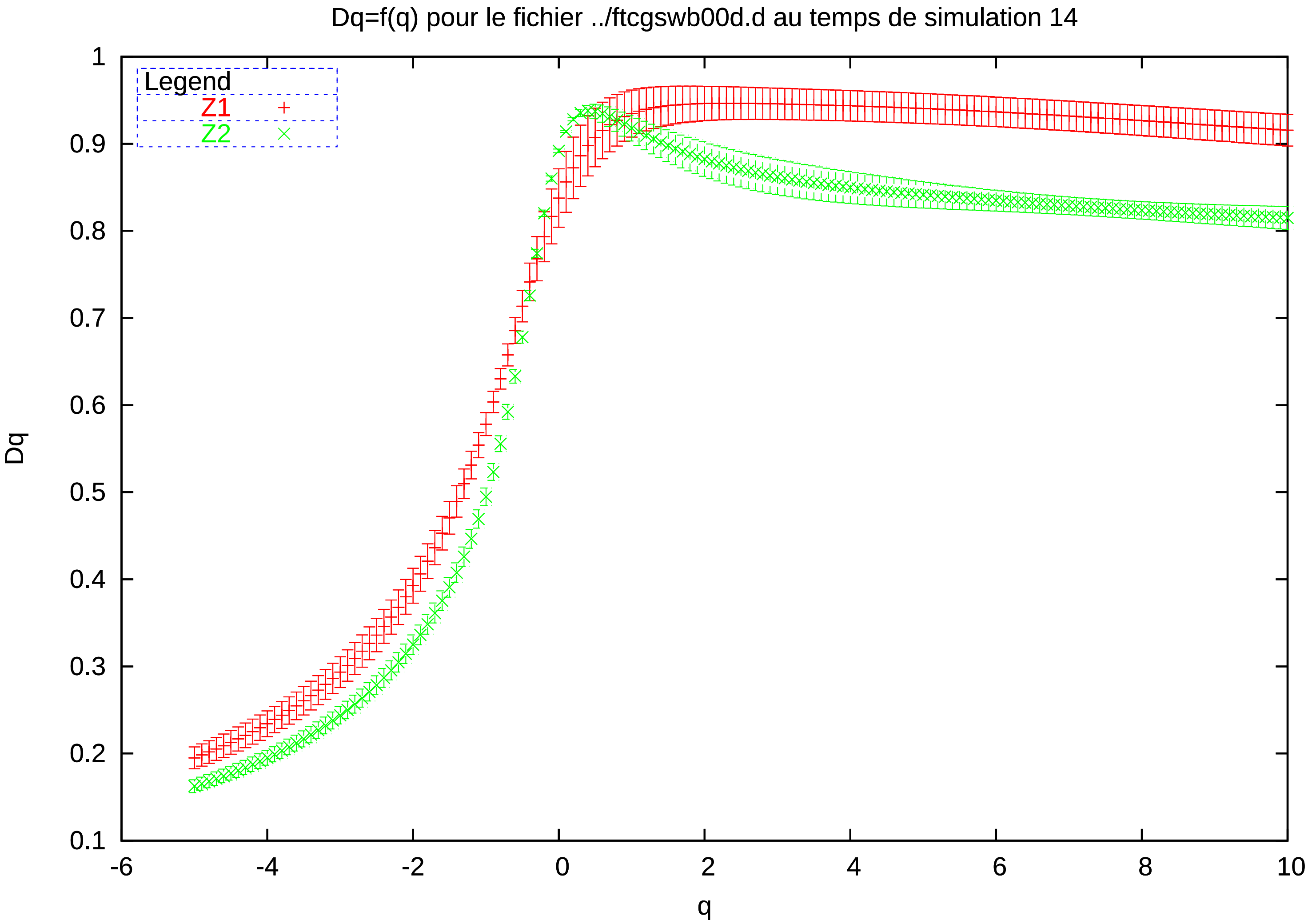

Tauq=f(q) pour le fichier ../fquinticwb00d.d au temps de simulation 14
Legend
Z1
Z2
Tauq
q
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

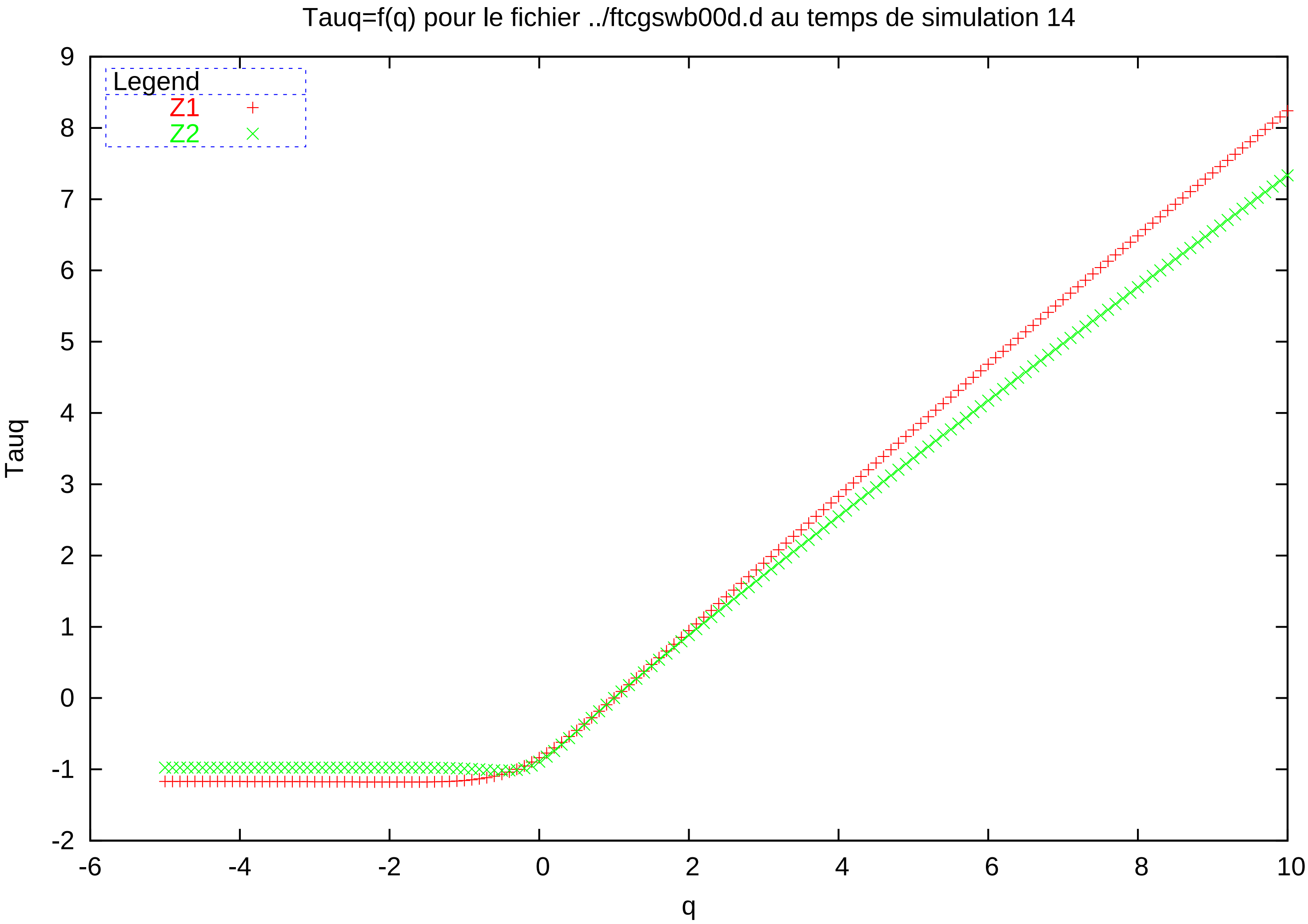
Rôle de la friction

On simule le Système 1D composé de particules qui s'attirent dans un fond fixe neutralisant et homogène répulsif (sans force de friction)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_j^2 x = E(x)$$

```
gnuplot tcgs zl q.gnu
```


Dq=f(q) pour le fichier ../ftcgswb00d.d au temps de simulation 14
Legend
Z1
Z2
Dq
q
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10


Tauq=f(q) pour le fichier ../ftcgswb00d.d au temps de simulation 14
Legend
Z1
Z2
Tauq
q
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

Conclusions et Perspectives

- Modèle simple d'univers en expansion
- Construit dans l'espace des phases une structure hiérarchique
- Fractal complexe
- Hypothèse bi-fractal est encore à confirmer (détermination de Λ)
- Regarder les espaces vides/pleins seuls
- Évolution des dimensions fractales en fonction du temps