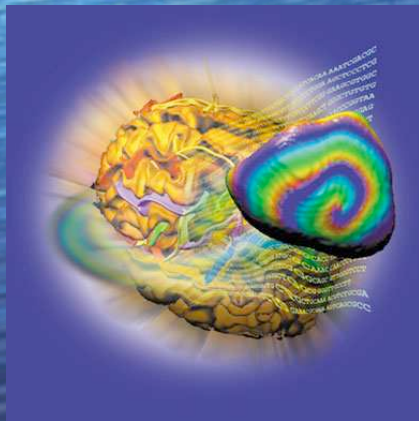
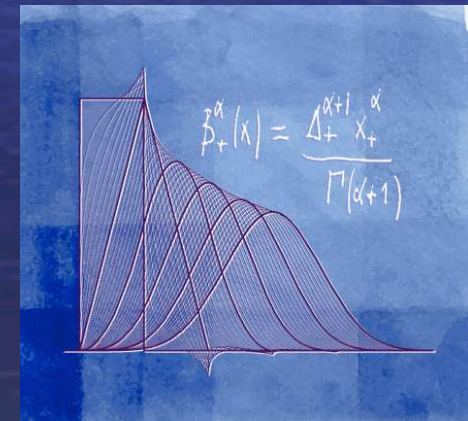


# Formalisme Multifractal fondé sur les Ondelettes: Quelques Applications



A. OUAHABI  
D. AIT AOUIT  
E. KURTARAN



# Motivations

- La détermination de singularités et de lois d'échelles.

# Outils

- Analyse multifractale exploitant des techniques multirésolution fondées sur le concept d'ondelettes.

# Applications

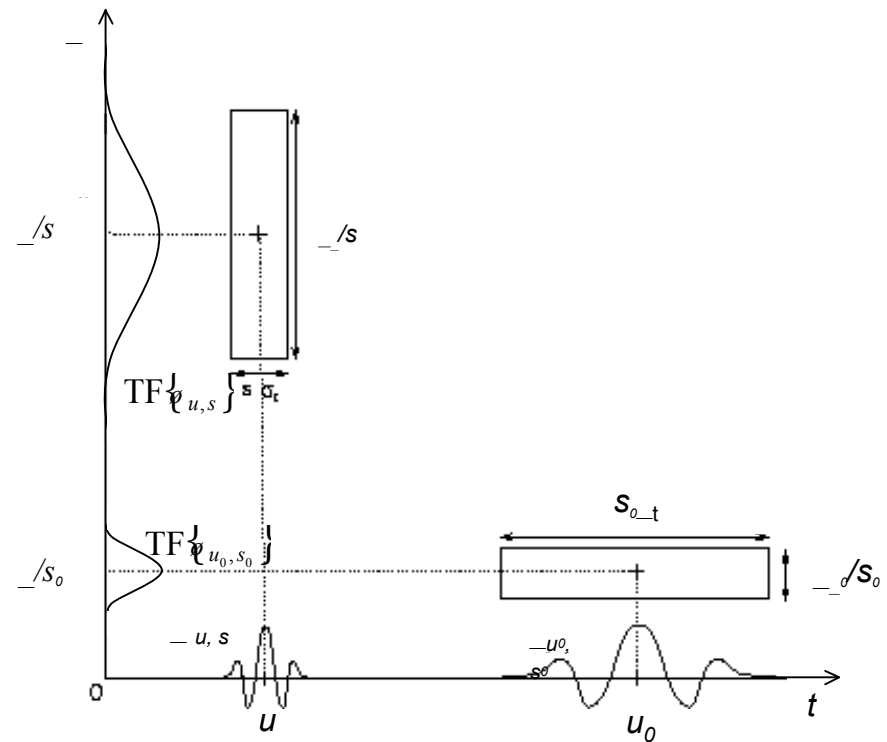
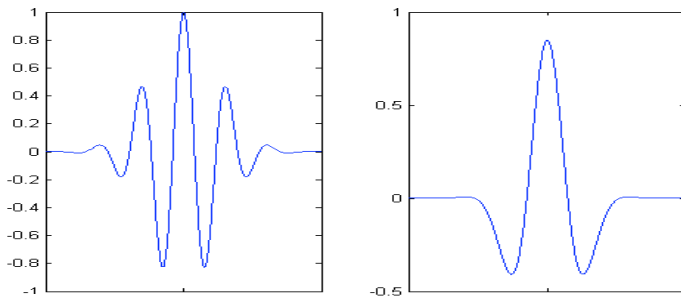
- L'autosimilarité des fractales exploitée par le concept d'ondelettes permet d'analyser des signaux et images complexes très variés (sciences de la nature et du vivant, sciences de l'ingénieur et sciences économiques...).



# Introduction aux ondelettes

## Transformation en Ondelettes

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{t-u}{s} \right) dt$$



# Les singularités et les structures irrégulières d'un signal sont porteuses d'informations pertinentes.

- **Exemple:** Détection et caractérisation des discontinuités de l'intensité d'une image = contours d'une scène, ou des transitoires d'un électro-encéphalogramme pathologique.
- Pour caractériser ces structures singulières, il est nécessaire de quantifier la régularité d'un signal: exposant de **Hölder**.
- La **décroissance de l'amplitude de la transformée en ondelettes** en fonction de l'échelle est liée à la régularité du signal. Mesurer cette décroissance asymptotique revient à faire un «zoom» sur les structures du signal avec une échelle qui tend vers zéro.

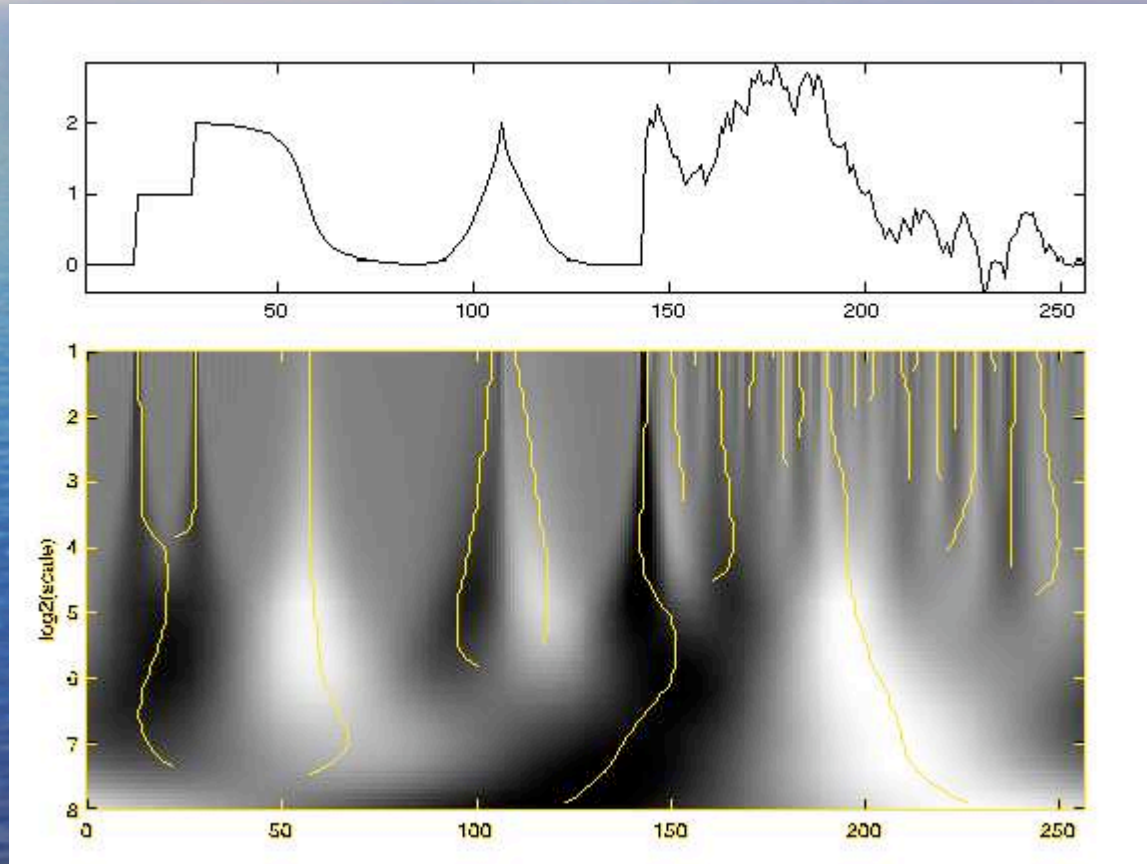


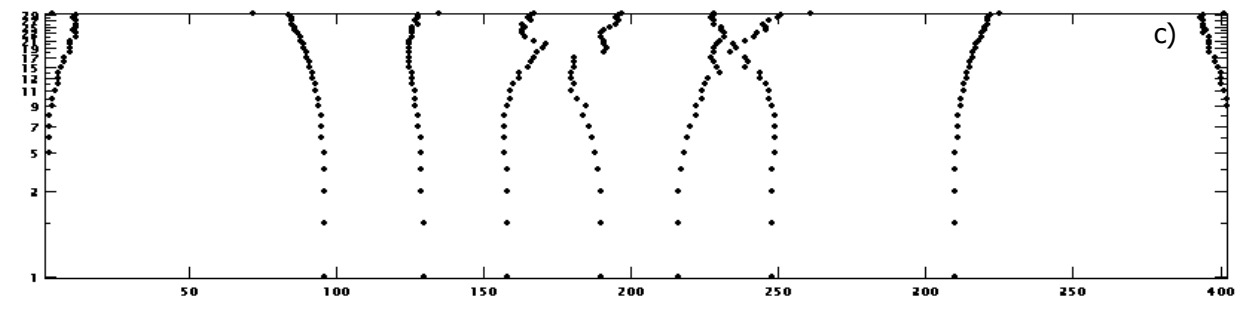
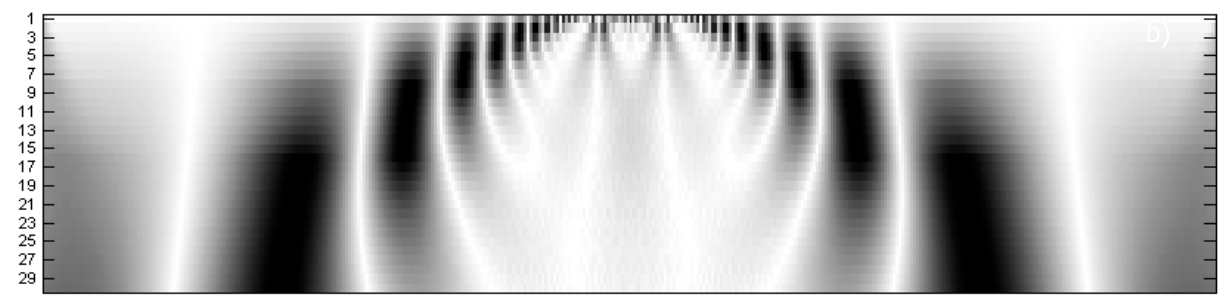
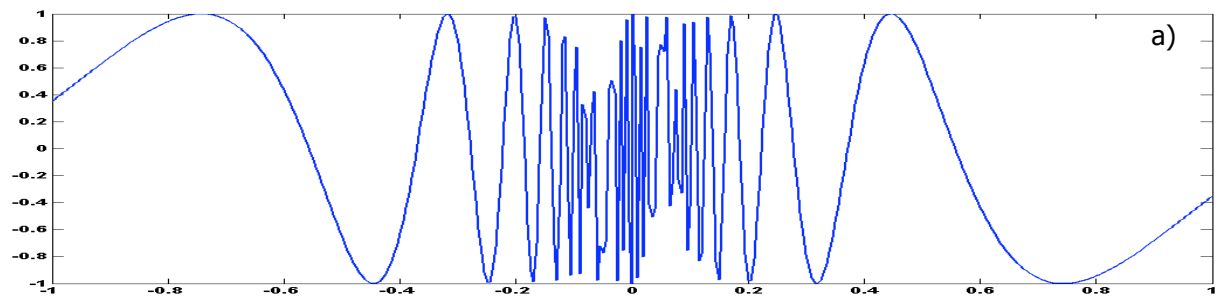
# Maxima de Modules de Transformée en Ondelettes

- Détection de singularités par MMTO

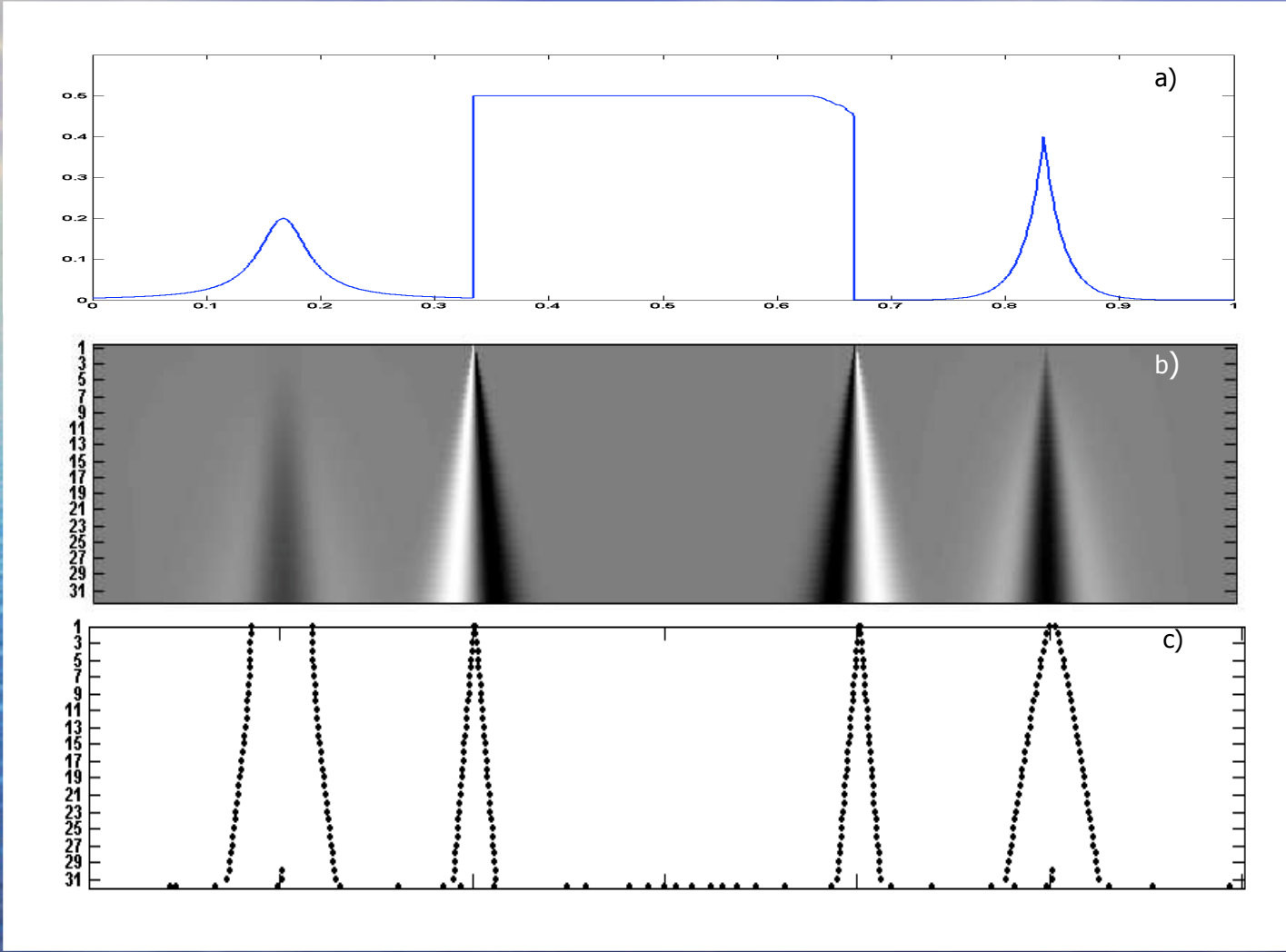
Les singularités sont détectées en cherchant les abscisses où convergent les modules maximaux d'ondelettes aux fines échelles.

# Exemples de détection de singularités par MMTO





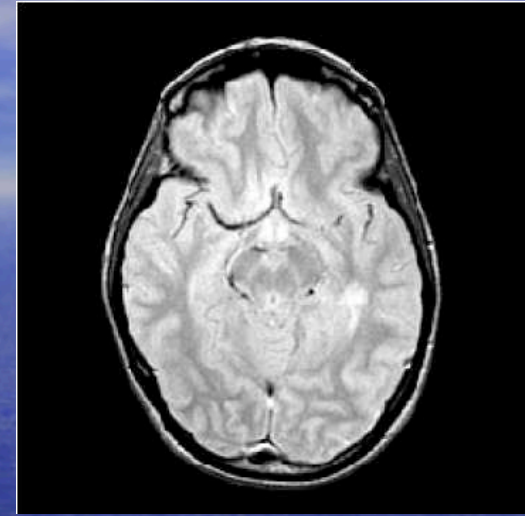




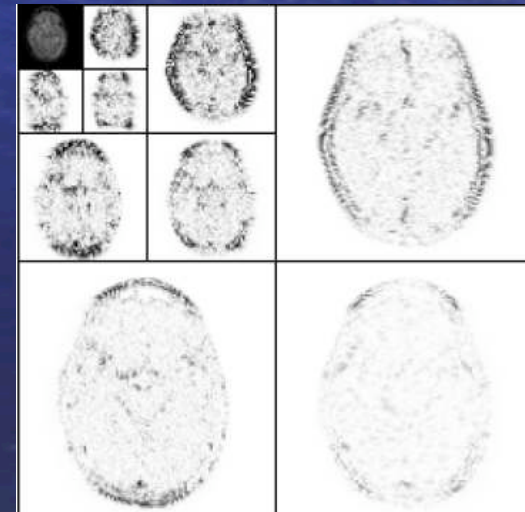


# Ondelletes et Compression d'Images Biomédicales

- **Grace à la compressibilité élevée des images biomédicales, la compression de ces données est indispensable en transmission et en stockage.**
- **La transformation en ondelettes propose une bonne localisation en temps (espace) et en fréquence (échelle).**
- **L'approche « ondelettes » est un outil puissant pour la compression des données.**



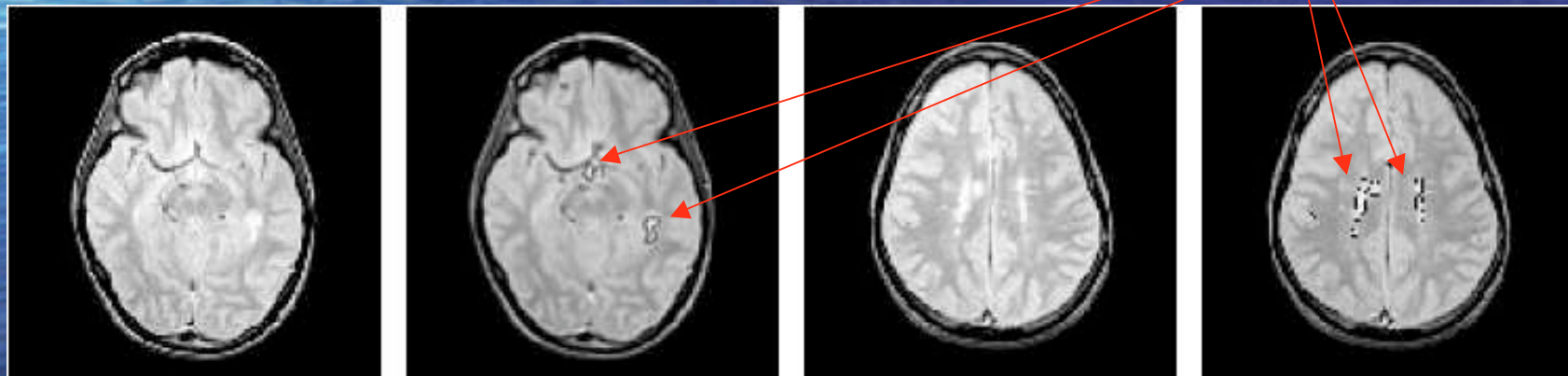
Une image MRI



Transformation d'ondelettes à l'échelle 3

# Ondelletes et Classification

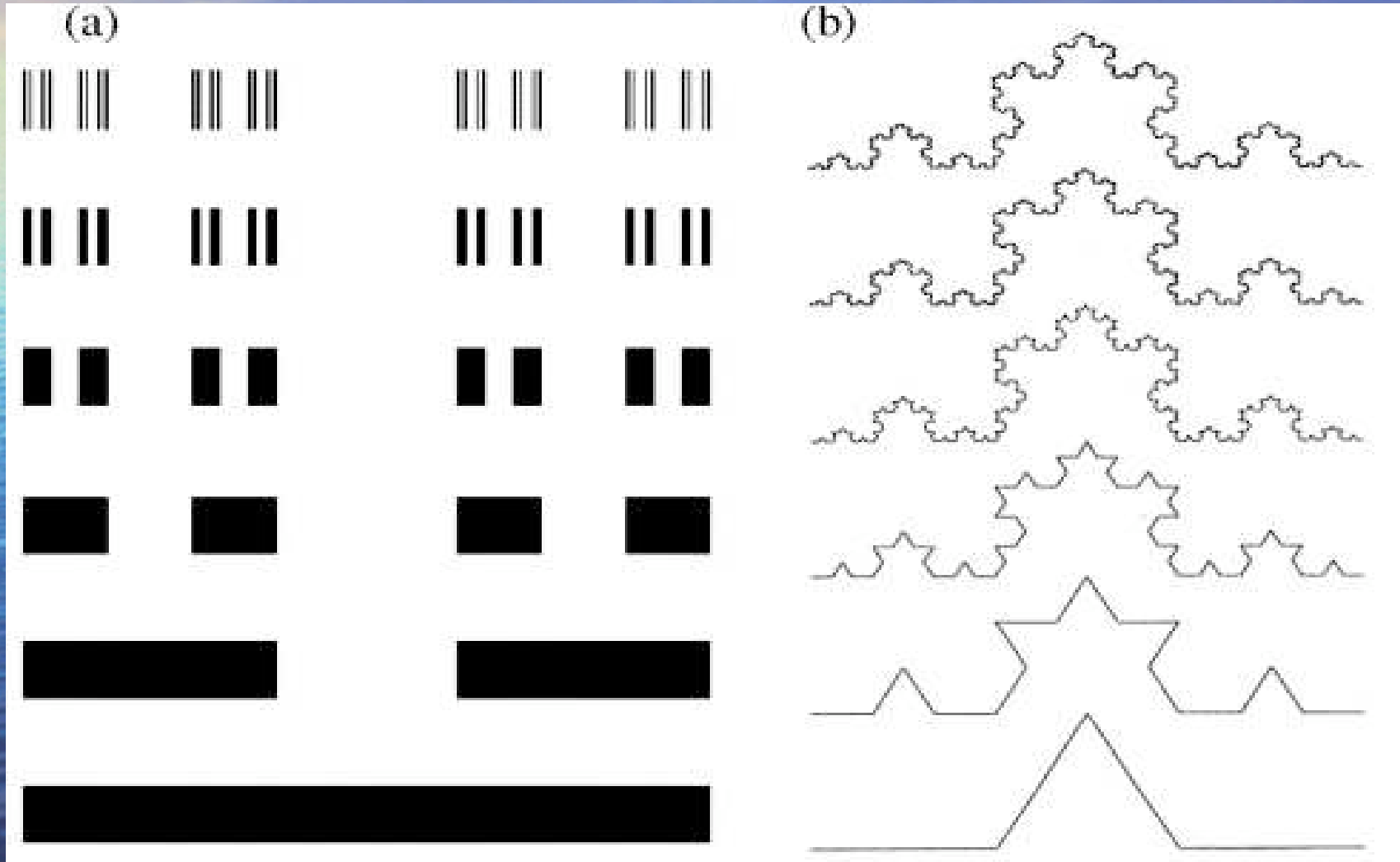
- Dans le domaine médical, la classification d'images peut être réalisée selon deux approches :
- Classification globale: distinguer les images avec lésions et sans lésion.
- Classification locale: identifier une région ou un ensemble de pixels en représentant certains objets ( lésions, vaisseaux sanguins).
- Un exemple de classification locale (une segmentation):






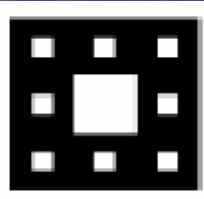


L'algorithme entoure plusieurs lésions possibles après avoir analysé la transformation en ondelettes des images MR



# Exemples de fractales



# Dimension fractale

objet	dimension euclidienne	objet	dimension fractale
	1		$1 < D < 2$
	2		$1 < D < 2$
	3		$2 < D < 3$

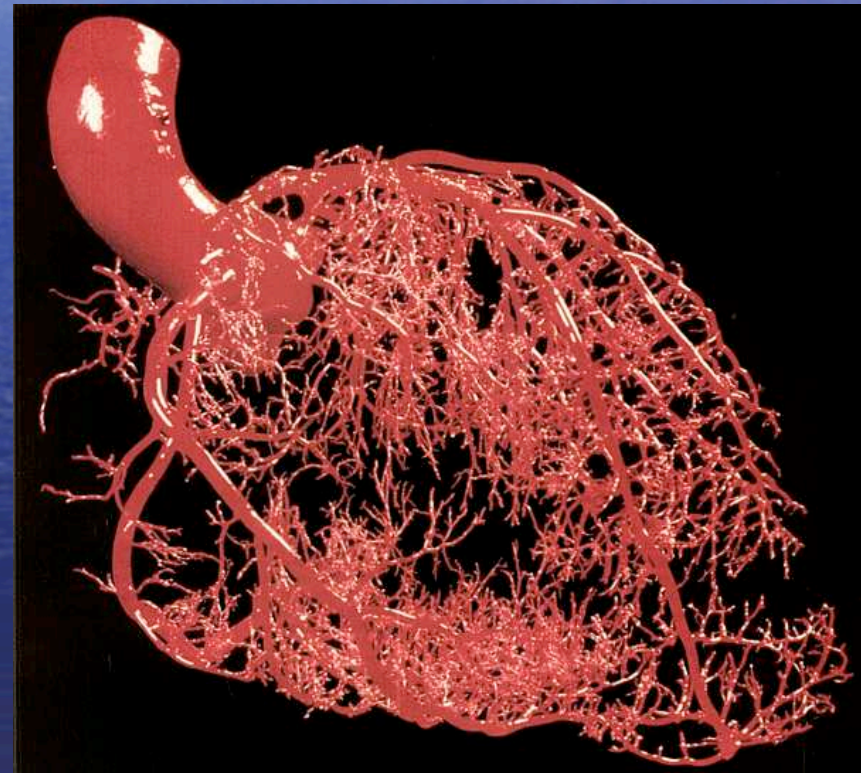


# FRACTALS AND PHYSIOLOGY

- Fractal characteristics:
  - Complex, patterned
  - Statistical self-similarity
  - Scale-invariant structure
  - Generated by simple iterative rules
  - $1/\omega^{2H+d}$  spectral decay

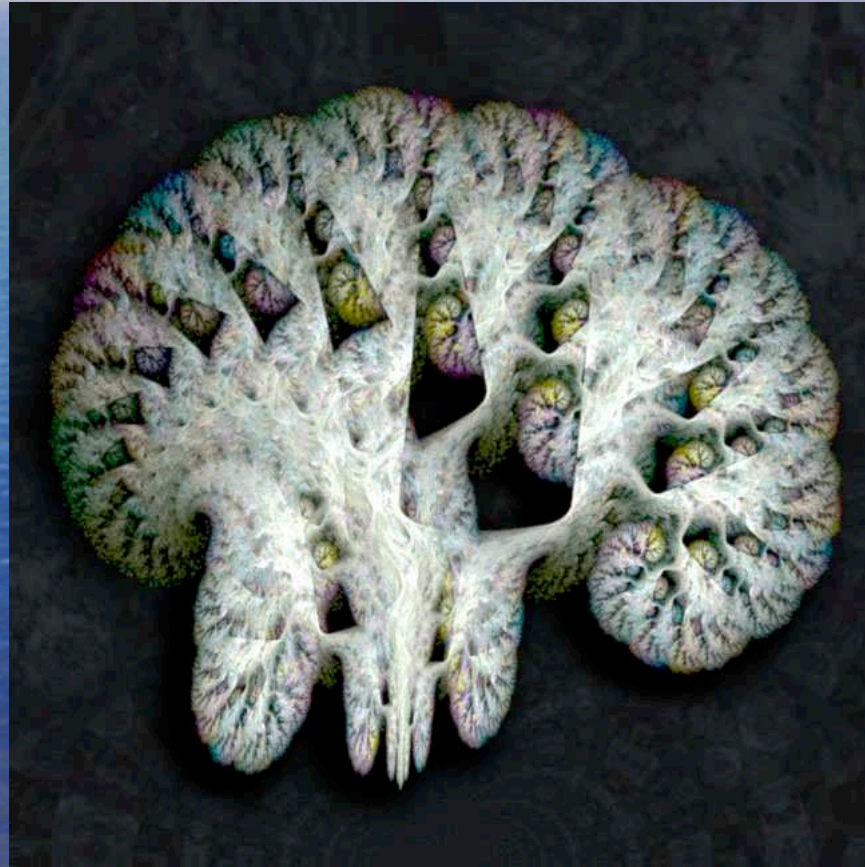
# Systeme cardio-vasculaire

- Coeur  
Arbre artériel

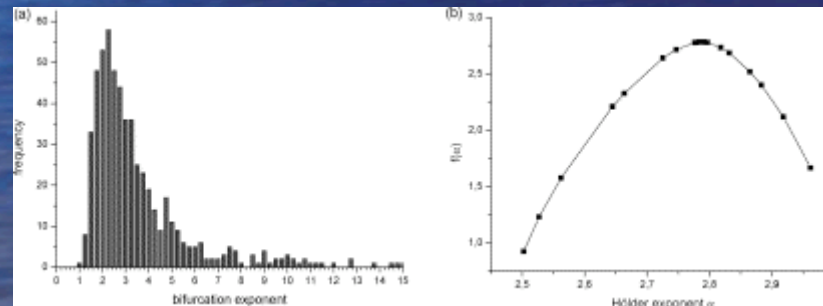
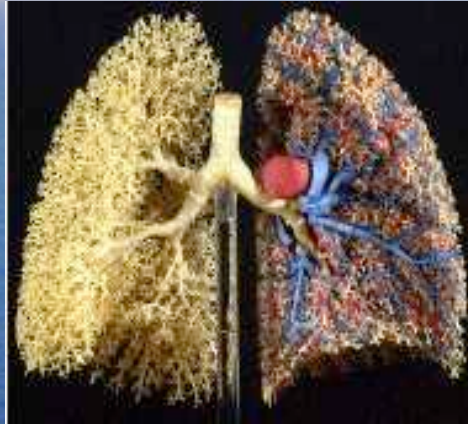




# Le cerveau : bio-fractal



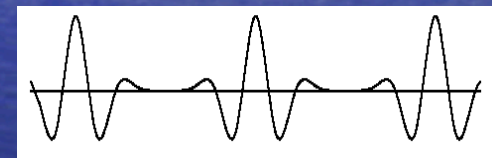
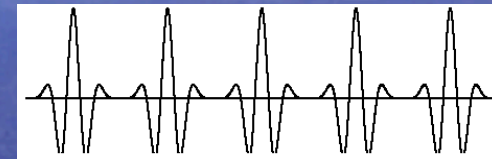
# Modèle fractal des bronches





# Motivation for using wavelets

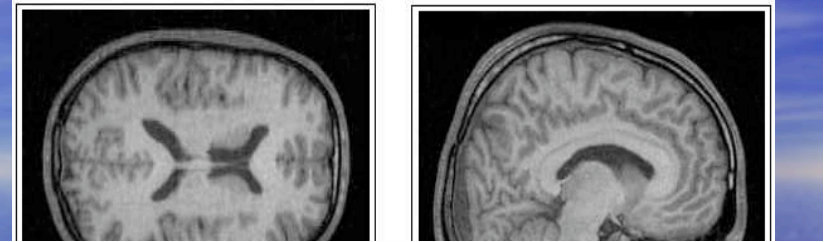
- Wavelets provide basis functions that are self-similar [Mallat, 1998]
- Wavelets approximately decorrelate statistically self-similar processes [Flandrin, 1992]
- Unlike Fourier exponentials, wavelets are jointly localized in space and frequency
- The basis functions themselves are fractals [Unser, 2002]



Wavelets are prime candidates for processing fractal-like signals and images

# Est-ce que le cortex cervical est une fractale ?

- Un analyse géométrique multiéchelle (spatiale) du cortex cérébral.



images T

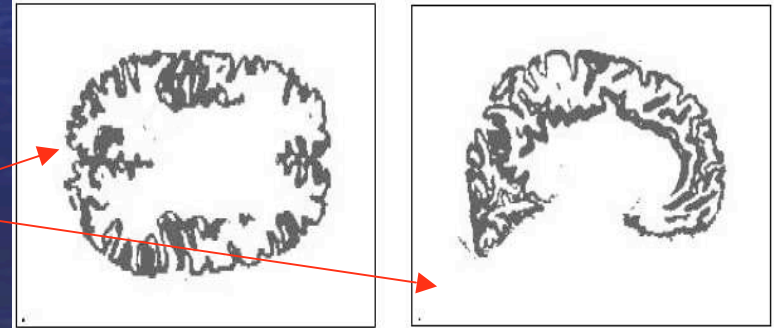
Subject	D (115–3.1 mm)	D (31–3.1 mm)
1	2.74±0.05	2.76±0.04
2	2.85±0.05	2.62±0.04
3	2.78±0.05	2.65±0.03
4	2.83±0.04	2.75±0.04
5	2.84±0.05	2.76±0.03
6	2.76±0.05	2.62±0.03
mean	2.80±0.05±0.02	2.69±0.07±0.01

- Le cortex possède une self-similarité (détails jusqu'à 3mm).

Resultats de la procedure de segmentation

- La dimension fractale est un bon indicateur pour détecter les anomalies des formes cérébrales.

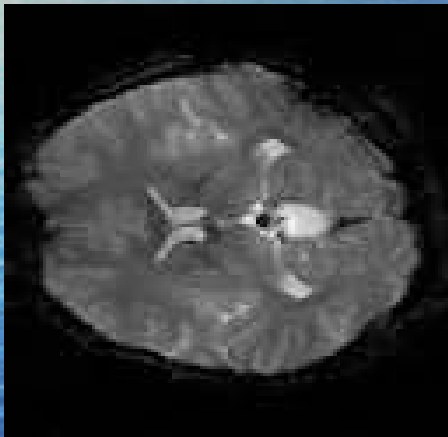
Sujets cortical extraits



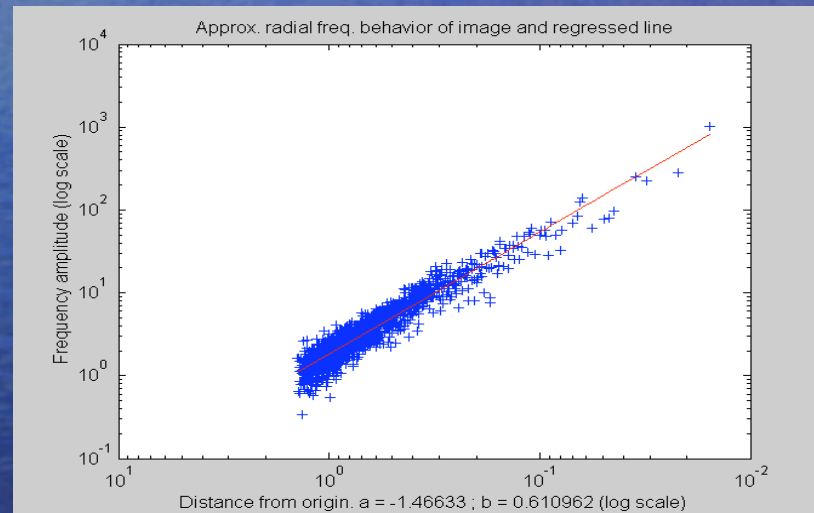
Coupe axiale et sagittale



# Nature fractale des données fMRI



Brain



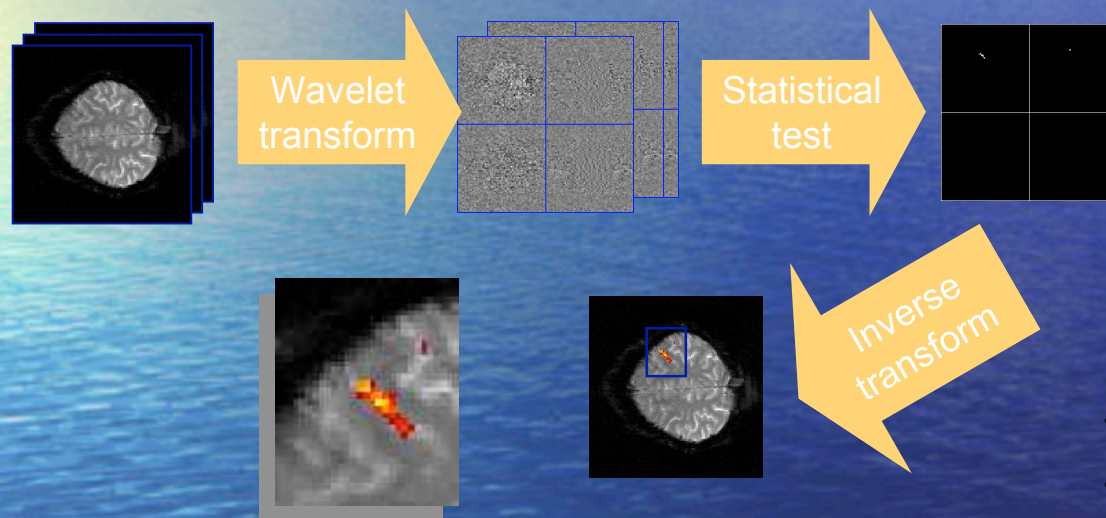
Log-Log plot of spectral density

Dimension fractale :

$$D = 1 + d - H = 2.534$$

# Analyse en Ondelettes des fMRI

Avantages de la T. O.

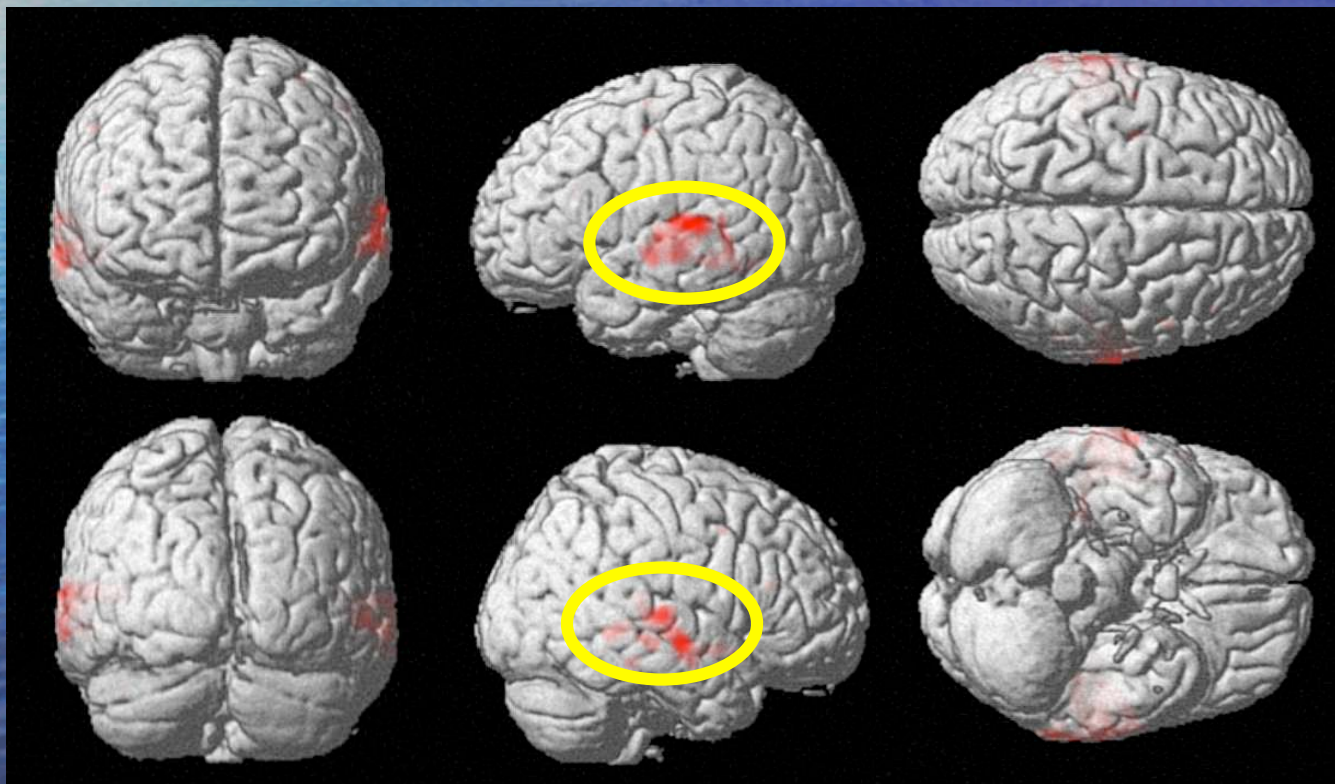


- Orthogonal transformation
- Decorrelates/whitens fMRI signal
- Data compression
- Increased signal-to-noise ratio (averaging effect)
- Preserves space localization



# Un exemple de stimulation auditive

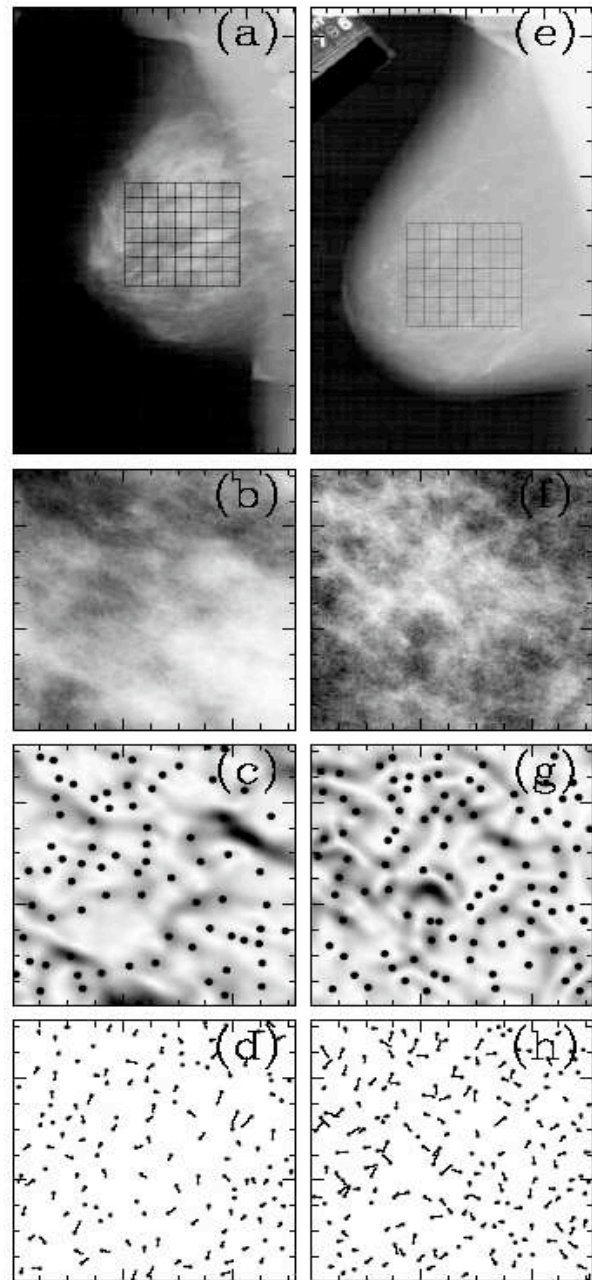
- fMRI



# Détection de micro-calcifications

**Micro-calcifications représentent des signes importantes du cancer du sein.**

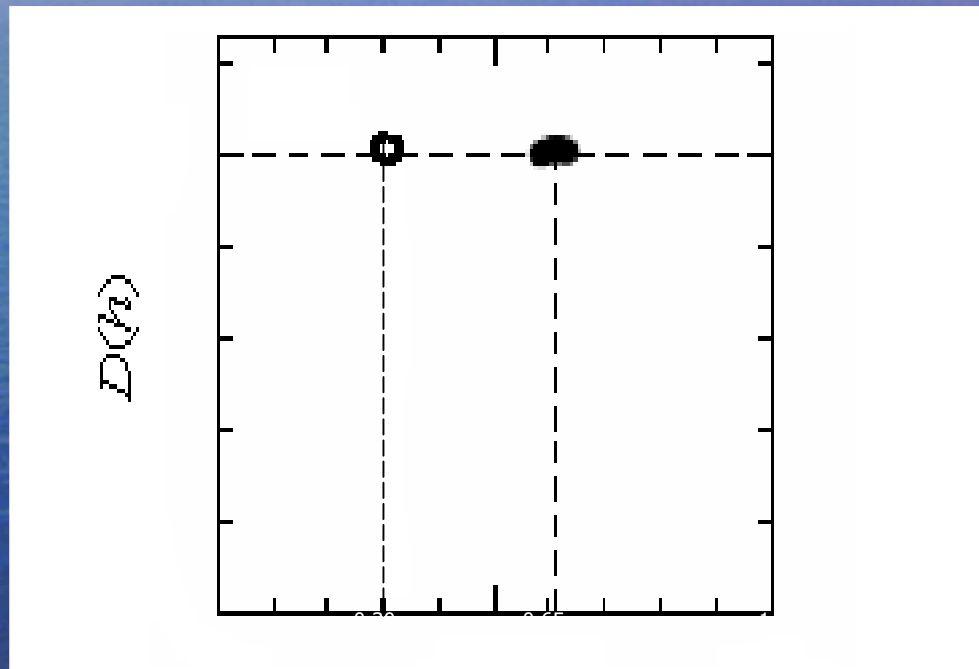




*Analyse par la MMT0 de 2 mammo-grammes : (a-d) sein à tissu dense et (e-h) sein à tissu gras. L'ondelette analysante est l'ondelette isotrope d'ordre 1 (dérivée d'une gaussienne). (a) et (e) représentent les mammogrammes originaux. (b) et (f) représentent leur agrandissement respectif (zoom dans la partie centrale :  $256 \times 256$  pixels). (c) et (g) montrent les modules de la TO et les chaînes de maxima à l'échelle  $s=39$  pixels. En (d) et (h) sont montrées les chaînes de maxima locaux ainsi que leurs positions.*

# Comportement monofractal (discrimination entre les tissus gras et dense)

$\frac{2}{2}$

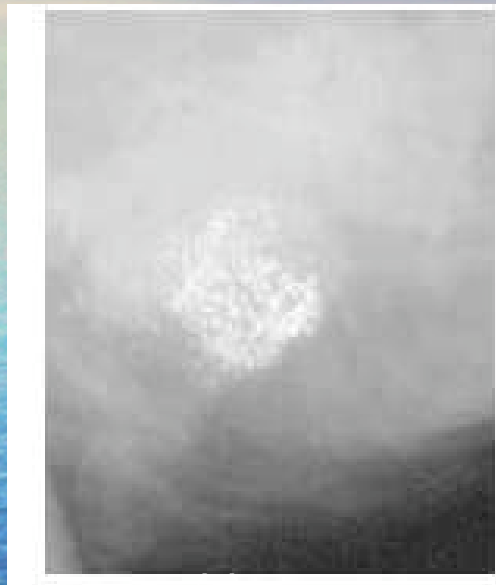


Exposant de Hölder  $h=0.3$  et  $h=0.65$

Spectre de singularités de 49 images (512\_512) superposées, sur la gamme d'échelles  $21 \leq s \leq 11$



# Détection des microcalcifications par MMTO



(a)



(b)

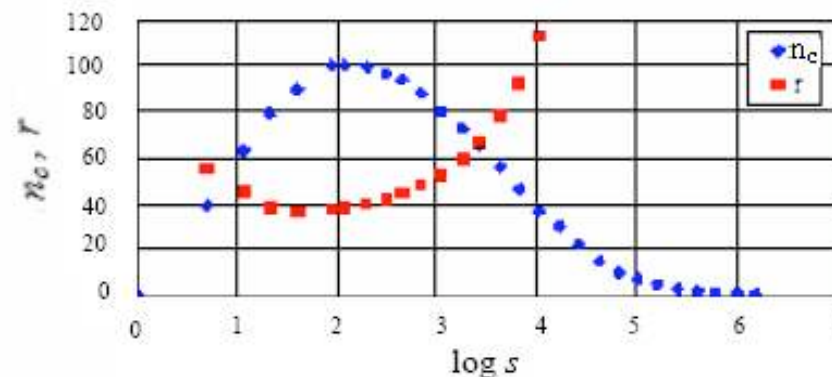
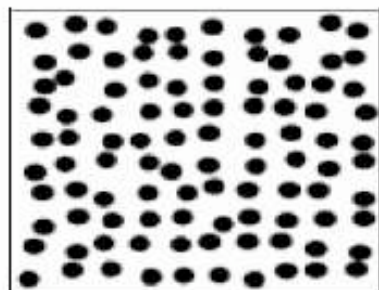


(c)

*Détection des microcalcifications d'un amas ( $df = 2 \pm 0.05$ ). (a) mammographie originale. (b) et (c) chaînes de maxima pointant sur les microcalcifications pour les échelles  $s=14$  pixels et  $s=24$  pixels.*

# Application en microbiologie

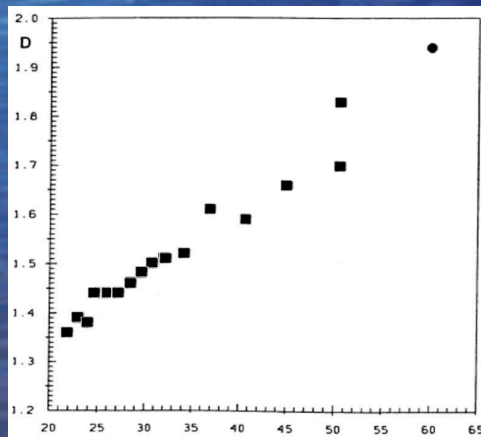
- Détermination du nombre de cellules de levure dans une image numérisée.
- Le procédé de la détermination du nombre et de la taille des cellules est:
  1. Application d'un masque pour l'ajustement de la couleur
  2. Détermination de la dimension fractale et de la mesure fractale de l'image masquéecomprenant l'interface du fond et l'interface des cellules
- Cette expérimentation montre que l'analyse fractale constitue un outil prometteur de comptage et de mesure d'objets dans une image numérique.



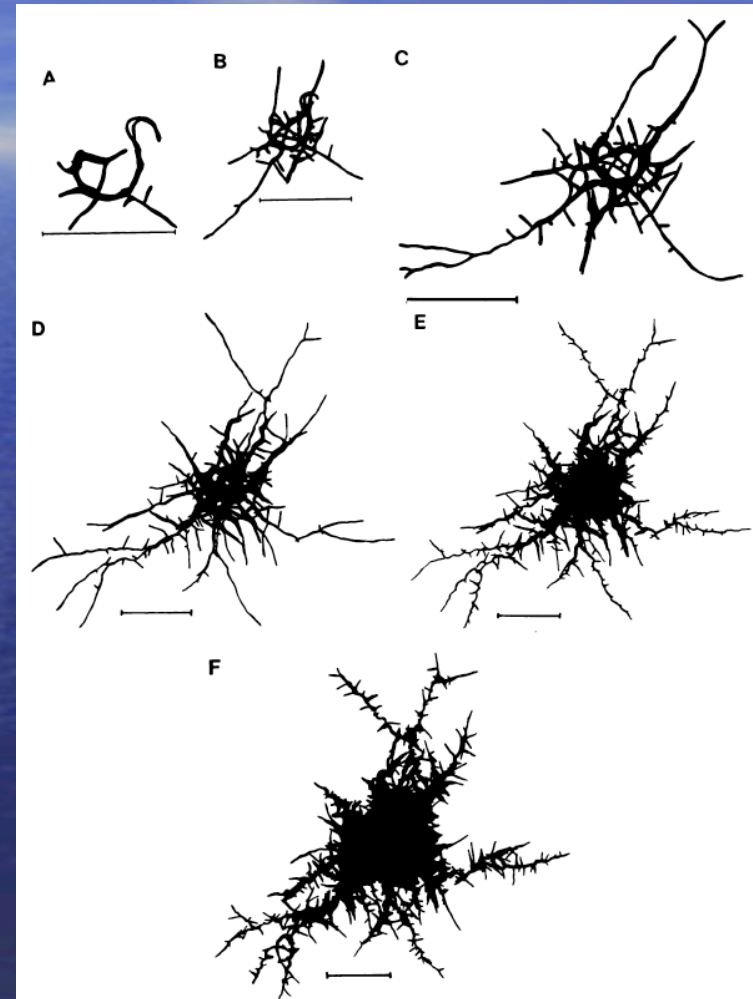


# Bacteriologie

- Description par géométrie fractale sert de modèles de croissance biologique.
- La dimension fractale augmente avec la croissance.
- Pour des micro-organismes d'une grande variabilité et sous des conditions différentes de croissance, la dimension fractale peut être utilisée comme une caractéristique morphologique importante de la croissance mycélienne.



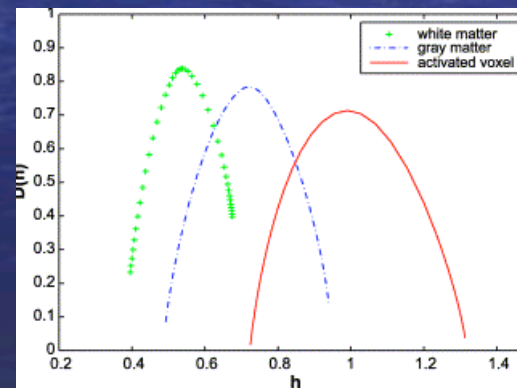
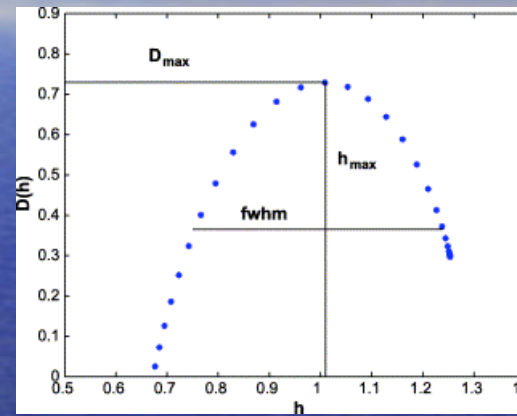
Dimension fractale en fonction du développement de *A. gossypii*



Développement de la structure mycélienne de *A. gossypii*

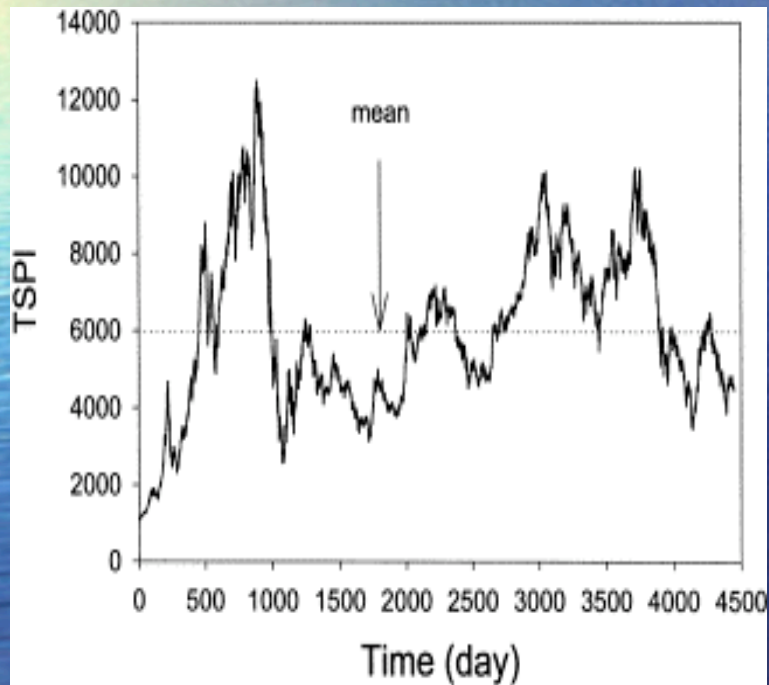
# Analyse multifractale

- Etude des signaux dont la régularité change brutalement d'un point à un autre.
- Outils: Spectre multifractal en fonction de l'exposant de Hölder  $h$



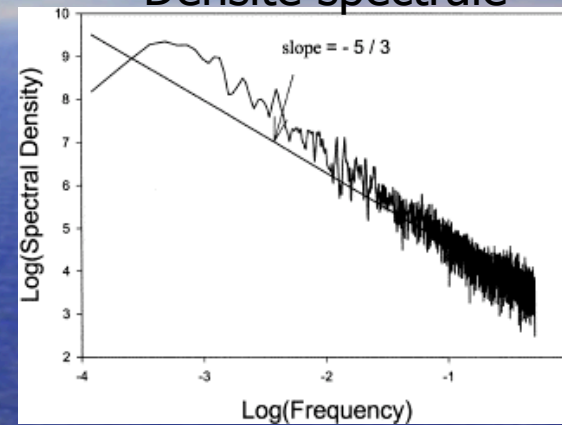


# Multifractalité d'un indice boursier

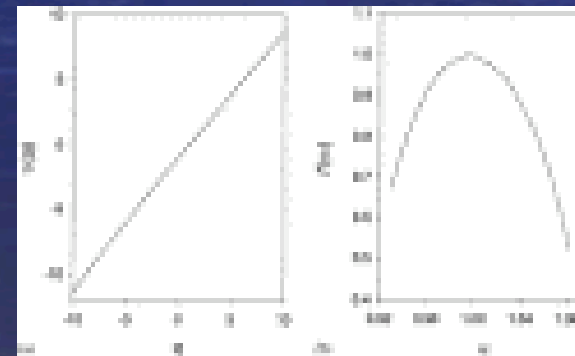


Evolution quotidienne d'un indice boursier (1987-2002)

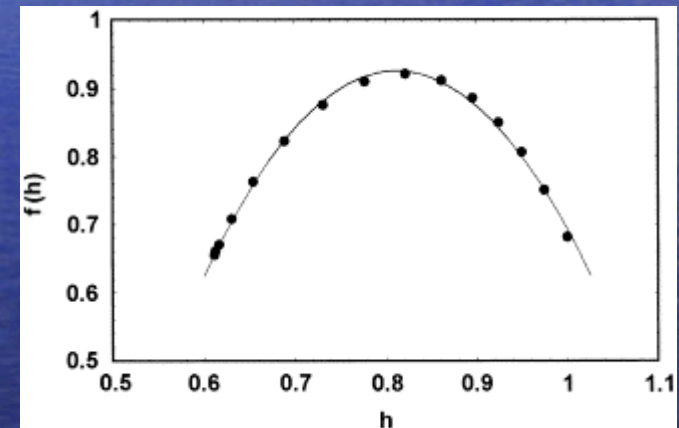
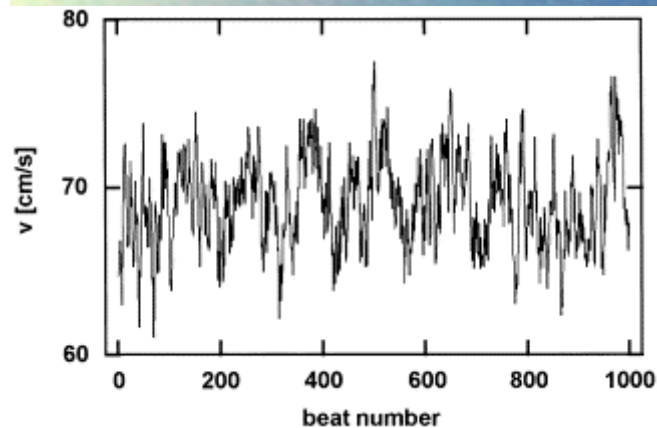
Densité spectrale



Spectre multifracatal



# Mutifractalité de l'écoulement sanguin cérébral



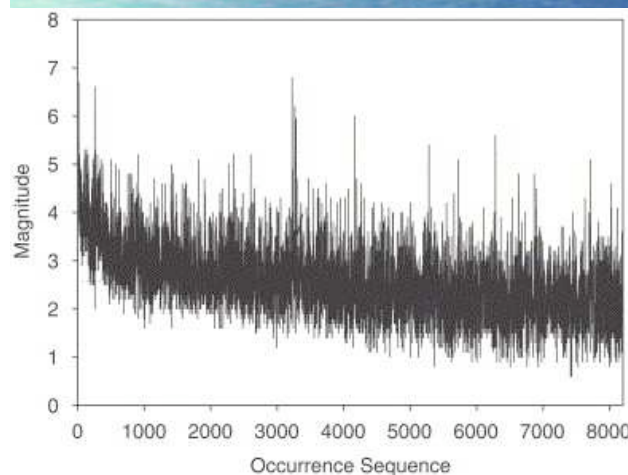
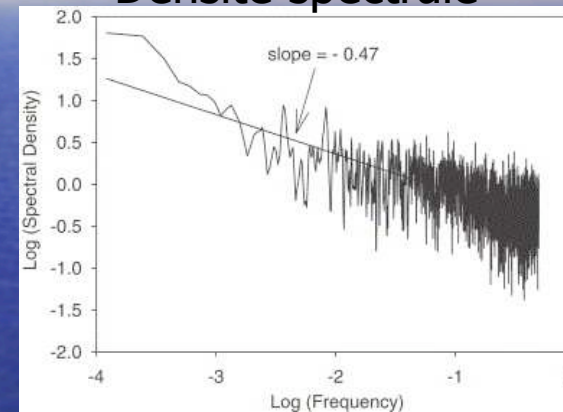
Vitesse d'écoulement sanguin (artère cérébrale moyenne d'un sujet sain).

Spectre multifractal calculé par MMT0. L'ondelette analysante est la dérivée seconde d'une gaussienne. Ce spectre est une moyenne de 10 enregistrements de 5 sujets.

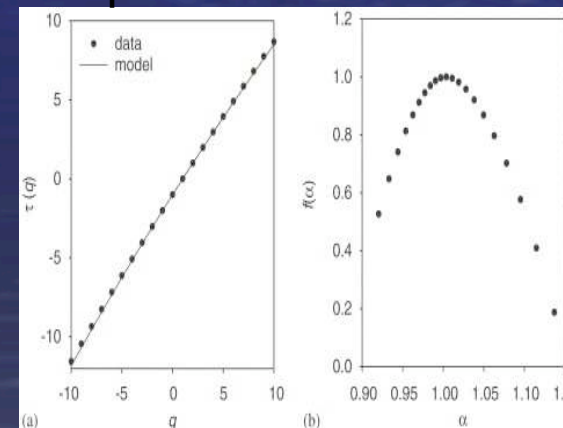


# Structure multifractale d'une réplique sismique

Densité spectrale



Spectre multifractal



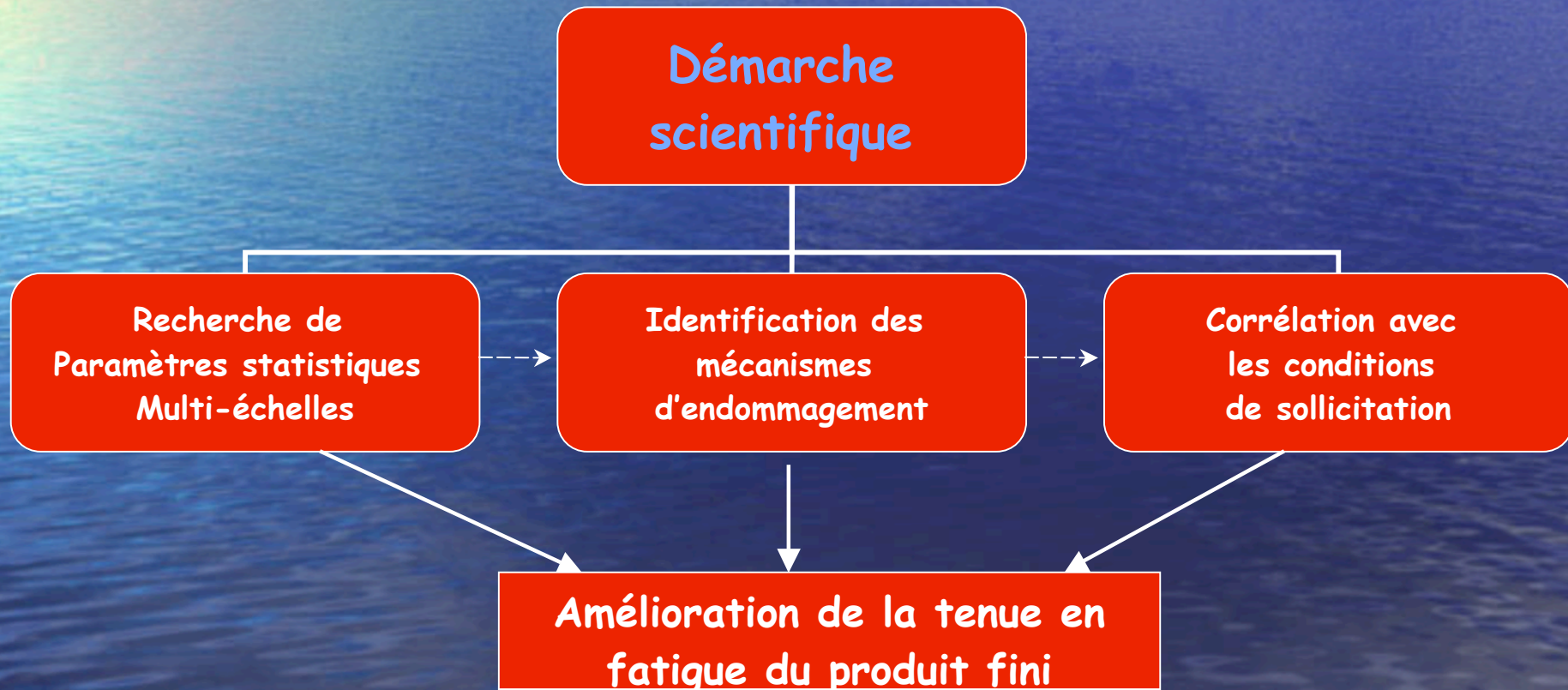
Magnitude d'une réplique sismique (axe vertical)

## Problématique

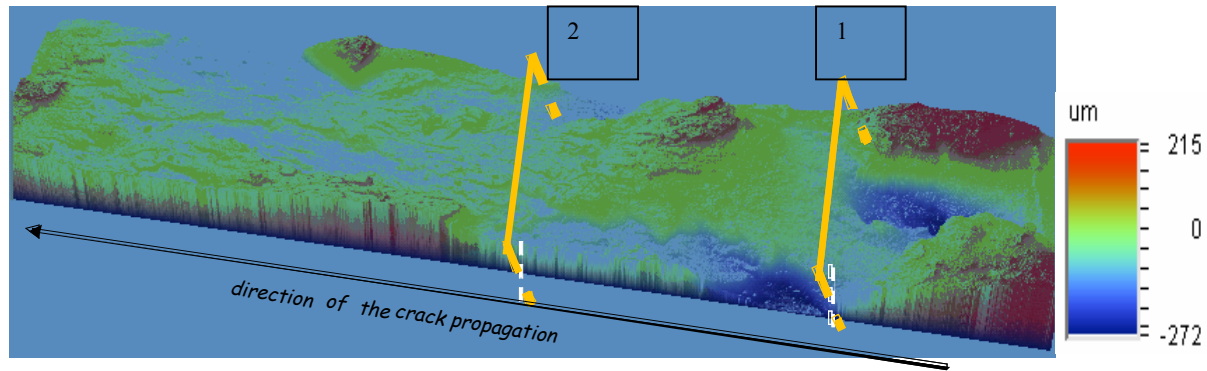
Modélisation et identification des mécanismes d'endommagement de matériaux

## Objectif de l'étude

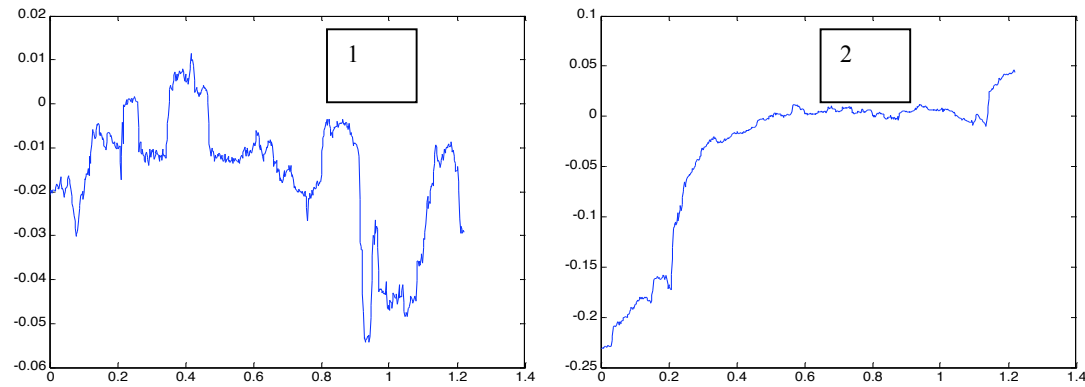
Compréhension des mécanismes de fatigue et d'endommagement des matériaux





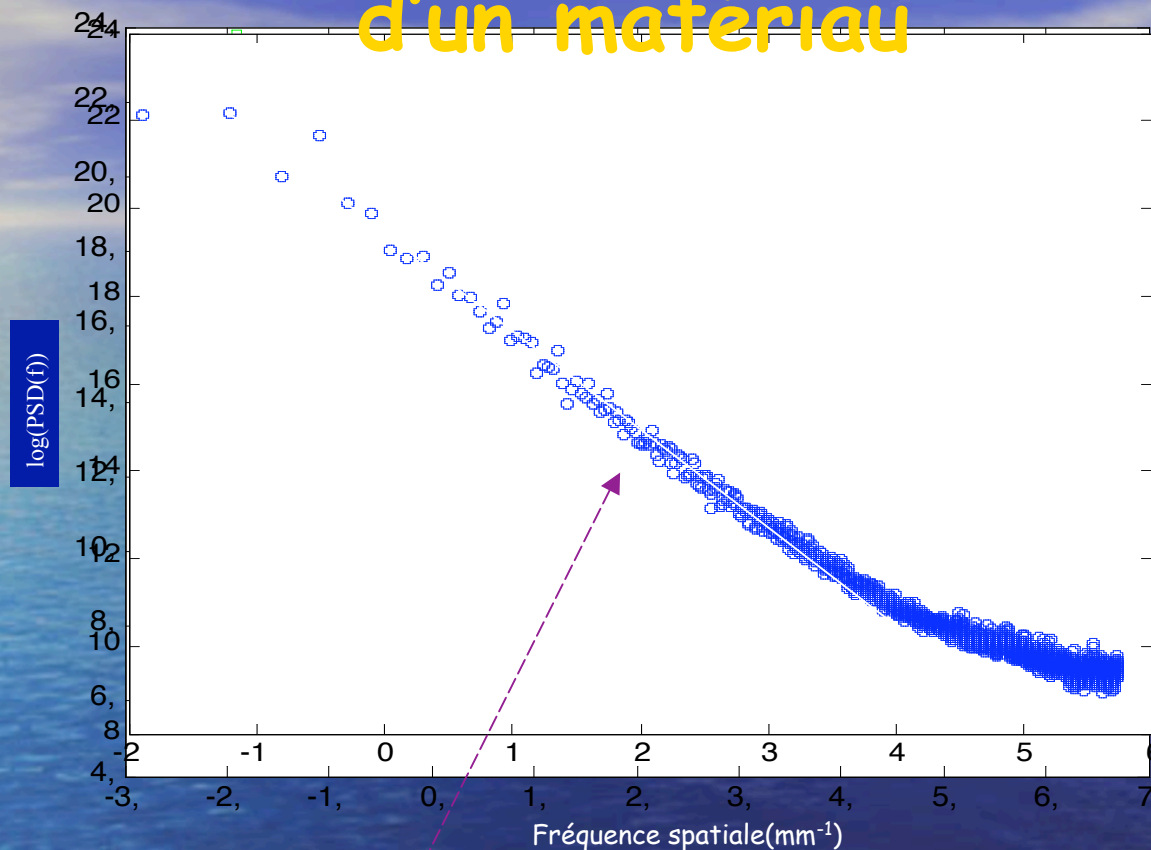


Example of digitized fracture surface



1D fracture profiles, extracted from the digitized fracture surface

# La densité spectrale des profils de rupture d'un matériau



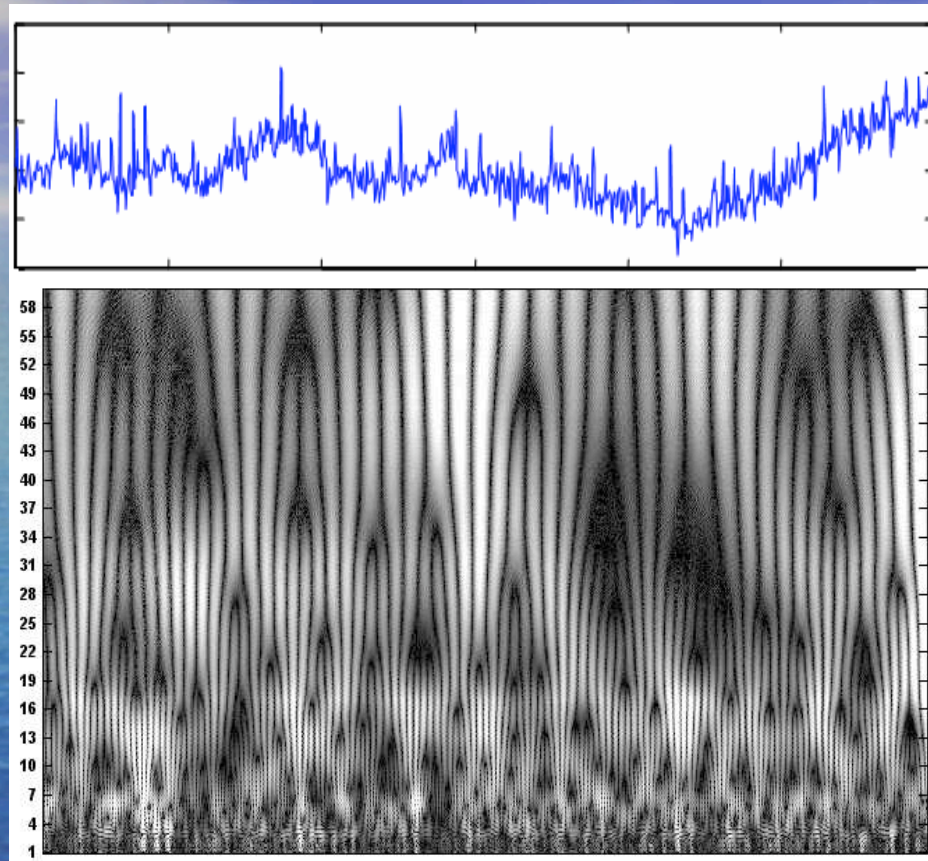
Décroissance en loi de puissance du spectre de Fourier



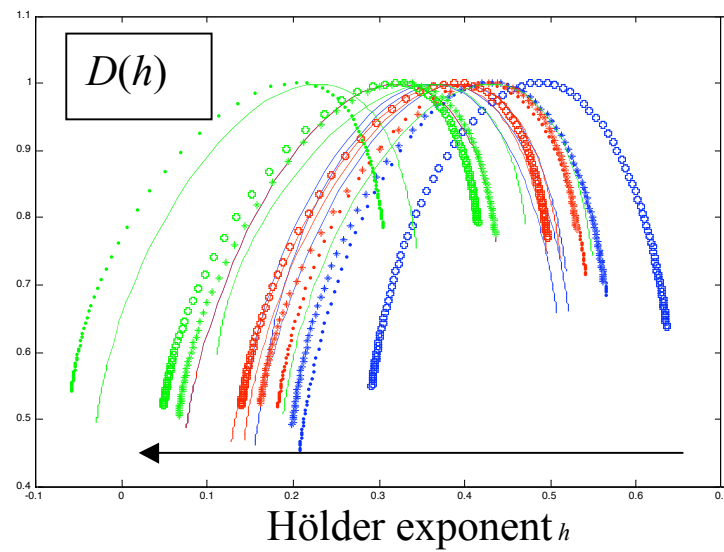
Auto-affinité des profils (avec l'exposant de Hurst  $H=0.66$ )



# Analyse temps-échelle des profils de rupture



Analyse temps-fréquence par transformée en ondelette, calculée avec la dérivée seconde d'une gaussienne.



. Multifractal spectrum of different profiles



# Bibliographie

- Ouahabi, A. and D. Ait Aouit, "ondelettes et fractales pour l'analyse du signal et de l'image," in *optimisation en traitement du Signal et de l'Image*, (IC2), Hermès-Lavoisier, 2007.
- Ouahabi, A., S. Jaffard, D. Ait Aouit and E. Kurtaran, "Wavelet based Multifractal Analysis in Fractography," soumis à IEEE SP.
- T. Blu and M. Unser, "Wavelet, fractals, and Radial Basis Functions," IEEE SP, vol. 50, N°3, 2002.