Un Modèle de croissance de corail Structuré par taille

P-E Jabin (Univ. Nice)
V. Lemesle (Univ. de la Méditerranée)
D. Aurelle (Univ. de la Méditerranée)

Objectifs

- Évolution d'une population de corail en prenant en compte la taille des individus.
- Plus précisémment, obtenir un modèle décrivant (Très sommairement) la croissance des branches de corail et leurs cassures éventuelles.
- Ce modèle dépendra éventuellement de conditions extérieures (climatiques ou autres) influant sur la croissance ou la fragilité.
- Ceci implique une sensibilité particulière des taux de croissance (ou décroissance) des populations de corail, aux conditions correspondantes.

Description sommaire du corail

Une colonie est composé de plusieurs individus (a priori différents génétiquement parlant).
Chaque individu est composé de plusieurs "branches" ramifiées.
Chacune de ces branches comporte une ossature calcaire qui sert de support aux polypes.

Ici, on ne s'intéresse pas aux différences génétiques, dont l'on ne tiendra donc pas compte.
$\longrightarrow$ L'objet et l'échelle à prendre en compte sont donc les branches.
Afin de simplifier au maximum, on oubliera les ramifications des branches.

Le modèle correspondant peut a priori s'appliquer à d'autres espèces (gorgones etc.)

Description d'une branche de corail

On suppose que la branche est symétrique par rotation d'où la représentation

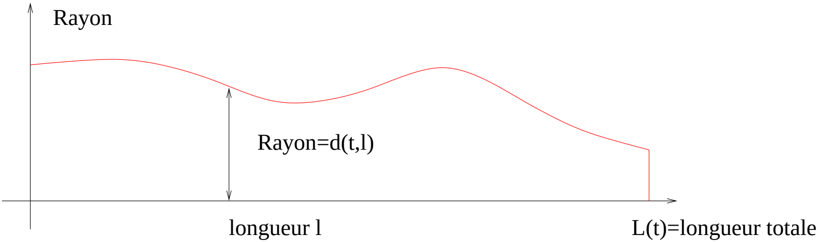

FIG.: Paramétrisation d'une branche

Croissance d'une branche de corail

On suppose que la longueur de la branche augmente uniformément en temps depuis une longueur nulle à la naissance, soit

$$\frac{dL(t)}{dt} = \sigma, \quad \text{ou} \qquad L(t) = \sigma(t-s),$$

si s est le temps de naissance de la branche (et donc pas nécessairement de l'individu).

Le diamètre en un point augmente aussi uniformément lorsque les conditions extérieures sont constantes (cf Marshal et al.)

$$\frac{\partial d(t,l)}{\partial l} = E,$$

où E représente les conditions extérieures (très vague), et peut dépendre du temps. Finalement

$$d(t,l) = d_0 + \int_{s+l/\sigma}^{t} E(r)\,dr, \quad \text{pour} \qquad l > \sigma(t-s),$$

$$d(t,l) = 0, \quad \text{pour} \qquad l > \sigma(t-s).$$

Cassure d'une branche de corail

On veut estimer la (densité de) probabilité $p(t,l,s)$ qu'a la branche de casser au temps t et à la position l.

On suppose que ceci ne dépend que la partie supérieure de la branche. Par exemple, en imaginant un flot de cisaillement sur la branche, on peut prendre

$$\text{Contrainte à l} \quad \sim \quad \int_l^{L(t)} l'\, d(t,l')\, dl'.$$

En prenant la résistance au point l proportionnelle à la densité de volume, on obtient

$$p(t,l,s) = \alpha(d(t,l))^{-2} \int_l^{L(t)} l'\, d(t,l')\, dl'.$$

Ceci est évidemment une suite d'hypothèses essentiellement invérifiables...

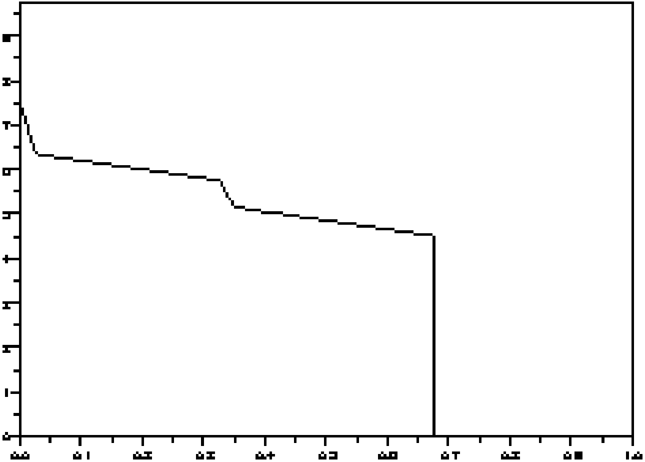

FIG.: Résultat de la croissance d'une branche

Évolution d'une population complète

Première difficulté : On doit garder en mémoire l'historique de l'évolution de chaque branche.

Pour cela on doit définir :
$n_0(t, l, s) =$ nombre de branches, nées au temps s qui, au temps t, ont la longueur l, et n'ont jamais cassé.
$n_1(t, l, s, s_1, l_1) =$ nombre de branches qui, en plus, ont cassé une fois, au temps s_1 et à la longueur l_1.
...
$n_k(t, l, s, s_1, \ldots s_k, l_1, \ldots, l_k) =$ nombre de branches qui, en plus, ont cassé k fois, au temps s_1 et à la longueur l_1, puis à s_2, l_2 et ainsi de suite jusqu'à la dernière cassure à s_k, l_k.

Ceci doit être fait a priori pour tous les k, même si en pratique (pour des applications numériques par exemple) n_k est vite très petit.

Morts et naissances

Morts : On prend un taux de mortalité constant d pour tous les individus.
$\Longrightarrow$ taux de mortalité constant pour toutes les branches.

Naissances : On suppose qu'un individu ayant k branches de longueurs $l_1 \ldots l_k$ contribue en moyenne aux naissances pour

$$b(l_1) + \ldots b(l_k).$$

On peut alors définir un taux de naissance pour une branche de taille l comme $b(l)$.

Cette hypothèse est douteuse mais nécessaire si l'on veut écrire le système simplement à l'échelle des branches.

Un premier système

On obtient alors une hiérarchie d'équations sur les n_k du type

$$\partial_t n_0 + \sigma \partial_l n_0 = -(d + S_0(t,l))\, n_0(t,s,l),$$

où $S_0(t,l)$ est la probabilité totale pour une branche simple de casser soit

$$S_0(t,l) = \alpha \int_0^l p(t,l',t-l/\tau)\, dl'.$$

Pour n_k, $k > 1$, l'équation est “pire”

$$\partial_t n_k + \sigma \partial_l n_k = -d n_k - \alpha\, n_k \int_0^l \frac{\int_{l'}^l \delta_k(t,l'',\ldots) l''\, dl''\, dl'}{(\delta_k(t,l',s,s_1,\ldots,l_k))^2}$$
$$+ \alpha \int_l^\infty n_{k-1}(t,l',s,s_1,\ldots,l_{k-1}) \frac{\int_{l_k}^{l'} \delta_{k-1}(t,l'',s,s_1,\ldots,l_{k-1}) l''\, dl''}{(\delta_{k-1}(t,l_k,s,s_1,\ldots,l_{k-1}))^2}\, dl'.$$

Ce système n'est pas raisonnable à étudier ou simuler.

Vers un modèle simplifié

On suppose essentiellement qu'une branche cassera à nouveau seulement plus loin que la cassure précédente.
Après analyse, ceci revient à la condition

$$\delta_0^2 << \frac{l^3}{\alpha\sigma^3}.$$

Comme la probabilité de casser au point l dépend seulement de ce qui se passe après l, on n'a plus besoin de garder en mémoire l'histoire de la branche.
On peut obtenir une équation directement sur le nombre total de branches de taille l

$$n(t,l) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{l_1,\dots,l_k=0}^{l} \int_{s_1,\dots,s_k=s}^{t} n_k(t,l,s,s_1,\dots,l_k)\, ds_1 \dots dl_k.$$

Le nouveau modèle

Prenons, pour simplifier, les conditions extérieures constantes $I(t) = I$. On obtient

$$\partial_t n(t,l) + \sigma \partial_l n = -dn - \alpha\, n \int_0^l \frac{\int_{l'}^{l} (d_0 + I(l-l'')/\sigma) l''\, dl'' dl'}{(d_0 + I(l-l')/\sigma)^2}$$
$$+ \alpha \int_l^\infty n(t,l') \frac{\int_l^{l'} (d_0 + I(l'-l'')/\sigma)\, l''\, dl''}{(d_0 + I(l'-l)/\sigma)^2}\, dl'.$$

$\sigma \partial_l n$ est le terme de croissance des branches.

-d n est évidemment le terme de mortalité. C'est le seul qui diminue le nombre de branches.

Les termes en rouge correspondent aux cas où les branches cassent. On doit enlever les branches de taille l qui cassent et rajouter les nouvelles branches de taille plus petite.

Conditions au bord et naissances

Les nouvelles branches, qui correspondent à une nouvelle branche pour un individu déjà vivant ou à un nouvel individu, apparaissent comme un terme de bord car leur longueur est initialement nulle

$$n(t,0) = \int_0^{+\infty} b(l)n(t,l)dl. \tag{1}$$

Si $b(l)$ est croissant en l, l'effet dû aux branches se cassant est de diminuer la taille moyenne des branches et donc le taux de natalité global. C'est bien ce que l'on cherche à observer.

Finalement le système a besoin d'une condition initiale

$$n(0,l) = n^0(l). \tag{2}$$

En général, c'est un problème important : on n'a pas d'idée précise sur la condition initiale à mettre.

Étude du modèle simplifié

Couplé à (2) et (1), on étudie le modèle sous sa forme générale

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial l} = -(d + S(l))n(t,l) + \int_l^{+\infty} K(l,l')S(l')n(t,l')dl', \quad (3)$$

où l'on a changé l'échelle de sorte que $\sigma = 1$. On de plus la propriété

$$\int_0^{l'} K(l,l')dl = 1.$$

Ces équations ressemblent beaucoup aux modéles de populations structurées par âge par exemple (la taille remplaçant le taux maturation). On peut notammer suivre la preuve de Mischler, Perthame et Ryzhik pour obtenir que, pour toute donnée initiale,

$$n(t,l) \longrightarrow e^{\gamma t} N(l), \quad quand\ t \to \infty.$$

Il suffit donc d'estimer γ et N pour avoir le comportement de la population sans se soucier de n^0.

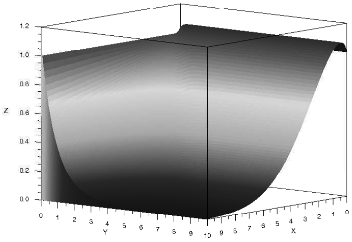

FIG.: Convergence vers le régime permanent, taux $S(I)$ important

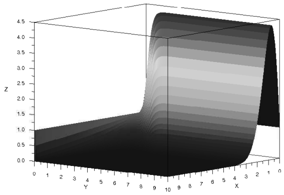

FIG.: Convergence vers le régime permanent, taux $S(I)$ faible

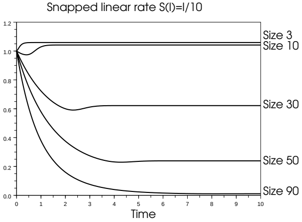

FIG.: Évolution des effectifs pour quelques tailles, taux $S(l)$ important

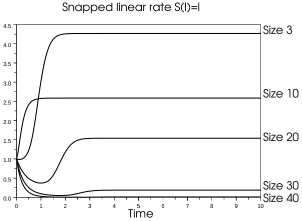

FIG.: Évolution des effectifs pour quelques tailles, taux $S(l)$ faible

Régime permanent

Une fonction $e^{\gamma t} n_\gamma(l)$ est solution du système (3) avec (1) ssi

$$\frac{dn_\gamma}{dl} = -(d + S(l) + \gamma)n_\gamma + \int_{l'>l} K(l,l')S(l')n_\gamma(l')dl', \qquad (4)$$

avec la condition de normalisation

$$n_\gamma(0) = \int_0^\infty b(l)n_\gamma(l)\, dl = 1. \qquad (5)$$

On peut prouver qu'il existe un unique γ_0 et une solution unique n_{γ_0} du système précédent, ce qui donne le taux de croissance asymptotique de la population.
On peut alors évaluer, au moins numériquement, l' influence des conditions extérieures sur ce taux.

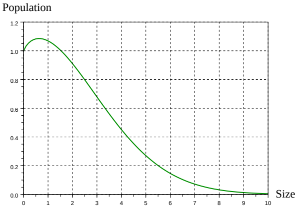

FIG.: Répartition par taille en régime permanent, taux $S(I)$ important

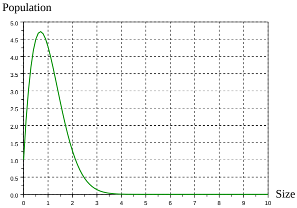

FIG.: Répartition par taille en régime permanent, taux $S(I)$ faible

Protection des populations

Au temps 5, on suppose que l'on protège complètement la population : $S = 0$ pour $t > 5$.

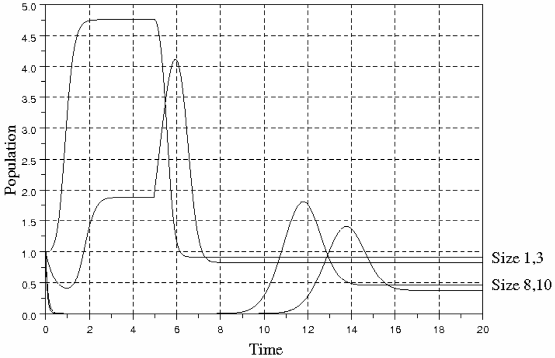

FIG.: Répartition par taille en régime permanent, taux $S(I)$ important

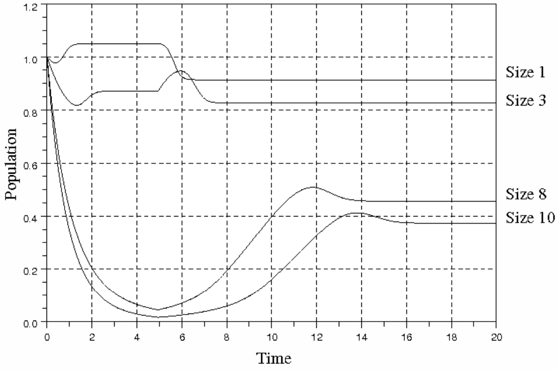

FIG.: Répartition par taille en régime permanent, taux $S(I)$ faible