Simulation d'événements pluvieux

Olivier Delestre

Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans
France

CASCIMODOT - 3 Juillet 2008

Contexte

Lutte contre l'érosion des sols par ruissellement...

(Photos : Yves Le Bissonnais, INRA)

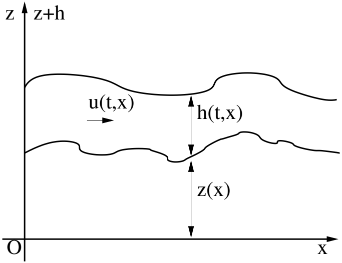
...de l'amont...

...à l'aval !

Aménagements au sein des zones amonts (bassins versants)

- D'où vient l'eau ?
- Où va-t-elle ?

Système de Saint-Venant



$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z \end{cases} \tag{1}$$

Propriétés du système (I) : **conservation**

En intégrant en x la première équation de (1), on a

$$\frac{d}{dt}\int_a^b h(t,x)\,dx + q(t,b) - q(t,a) = 0,$$

$q = hu$ est le débit.

Propriétés du système (I) : **conservation**

En intégrant en x la première équation de (1), on a

$$\frac{d}{dt}\int_a^b h(t,x)\,dx + q(t,b) - q(t,a) = 0,$$

$q = hu$ est le débit.

Conservation du volume d'eau.

Propriétés du système (I) : **conservation**

En intégrant en x la première équation de (1), on a

$$\frac{d}{dt}\int_a^b h(t,x)\,dx + q(t,b) - q(t,a) = 0,$$

$q = hu$ est le débit.

Conservation du volume d'eau.

Deuxième équation : conservation de la quantité de mouvement

Propriétés du système (II) : **transport**

On considère une flaque d'eau.

$$h = h_0 \qquad \text{et} \qquad u = 0.$$

Propriétés du système (II) : **transport**

On considère une flaque d'eau.

$$h = h_0 \qquad \text{et} \qquad u = 0.$$

Petites perturbations : on obtient des "vagues" (ondes de surface)

$$h = h_0 + \eta \qquad \text{et} \qquad u = \nu.$$

Propriétés du système (II) : **transport**

On considère une flaque d'eau.

$$h = h_0 \qquad \text{et} \qquad u = 0.$$

Petites perturbations : on obtient des "vagues" (ondes de surface)

$$h = h_0 + \eta \qquad \text{et} \qquad u = \nu.$$

On obtient

$$\begin{cases} \partial_t \eta + h_0 \partial_x \nu & = & 0 \\ \partial_t \nu + g \partial_x \eta & = & 0 \end{cases}$$

Deux équations d'onde

$$\partial_{tt} \nu - g h_0 \partial_{xx} \nu = 0, \qquad \partial_{tt} \eta - g h_0 \partial_{xx} \eta = 0,$$

Propriétés du système (II) : **transport**

On considère une flaque d'eau.

$$h = h_0 \qquad \text{et} \qquad u = 0.$$

Petites perturbations : on obtient des "vagues" (ondes de surface)

$$h = h_0 + \eta \qquad \text{et} \qquad u = \nu.$$

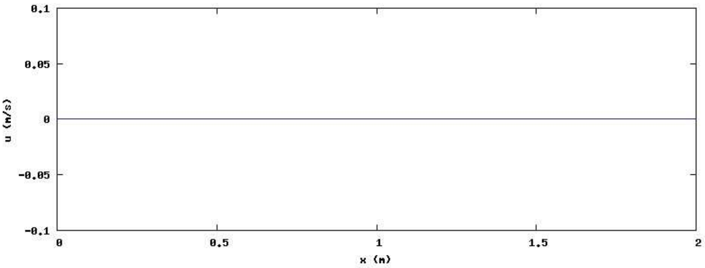
On obtient

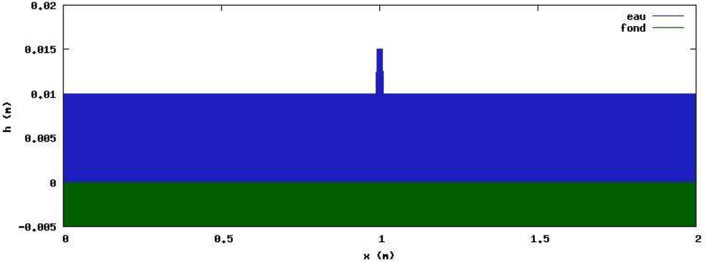
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \eta + h_0 \partial_x \nu & = & 0 \\ \partial_t \nu + g \partial_x \eta & = & 0 \end{array} \right.$$

Deux équations d'onde

$$\partial_{tt} \nu - g h_0 \partial_{xx} \nu = 0, \qquad \partial_{tt} \eta - g h_0 \partial_{xx} \eta = 0,$$

vitesses des ondes $-\sqrt{g h_0}$ et $\sqrt{g h_0}$.


0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
u (m/s)
0
0.5
1
1.5
2
x (m)


0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
h (m)
eau
fond
0
0.5
1
1.5
2
x (m)

Transport – suite

- En dynamique des gaz, on utilise le rapport de la vitesse d'écoulement et de la vitesse des ondes :

  Nombre de Mach

  Il permet de déterminer le type d'écoulement :

  subsonique ou supersonique.

Transport – suite

- En dynamique des gaz, on utilise le rapport de la vitesse d'écoulement et de la vitesse des ondes :

  Nombre de Mach

  Il permet de déterminer le type d'écoulement :

  subsonique ou supersonique.

- Pour les écoulements à surface libre, ce rapport est appelé :

  Nombre de Froude

  Il permet de déterminer le type de régime :

  fluvial ou torrentiel.

Avec $c = \sqrt{gh}$ la vitesse des ondes, le nombre de Froude est alors défini par :

$$Fr = \frac{|u|}{c}$$

Avec $c = \sqrt{gh}$ la vitesse des ondes, le nombre de Froude est alors défini par :

$$Fr = \frac{|u|}{c}$$

Et on a :

Avec $c = \sqrt{gh}$ la vitesse des ondes, le nombre de Froude est alors défini par :

$$Fr = \frac{|u|}{c}$$

Et on a :

- $Fr > 1$ écoulement torrentiel : toutes les ondes vont dans le sens du courant,

Avec $c = \sqrt{gh}$ la vitesse des ondes, le nombre de Froude est alors défini par :

$$Fr = \frac{|u|}{c}$$

Et on a :

- $Fr > 1$ écoulement torrentiel : toutes les ondes vont dans le sens du courant,
- $Fr < 1$ écoulement fluvial : une partie des ondes remonte le courant.

Avec $c = \sqrt{gh}$ la vitesse des ondes, le nombre de Froude est alors défini par :

$$Fr = \frac{|u|}{c}$$

Et on a :

- $Fr > 1$ écoulement torrentiel : toutes les ondes vont dans le sens du courant,
- $Fr < 1$ écoulement fluvial : une partie des ondes remonte le courant.

Est-ce que le système de Saint-Venant vérifie ces propriétés ?

Transport – suite

Diagonalisation du système d'edp

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t h + \partial_x(hu) & = & 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{gh^2}{2}) & = & -gh\partial_x z \end{array} \right.$$

Transport – suite

Diagonalisation du système d'edp

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \dfrac{gh^2}{2}) &= -gh\partial_x z \end{cases}$$

Posons

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x z \end{pmatrix},$$

on a sous forme compacte

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = \partial_t U + F'(U)\partial_x U = B,$$

et l'on étudie la matrice $A(U) = F'(U)$.

Pour $h > 0$, $A(U)$ est diagonalisable

$$\lambda_-(U) = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_+(U) = u + \sqrt{gh}$$

Pour $h > 0$, $A(U)$ est diagonalisable

$$\lambda_-(U) = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_+(U) = u + \sqrt{gh}$$

Formellement, on obtient deux équations de transport

$$\partial_t w_\pm + \lambda_\pm w_\pm = \widetilde{B}$$

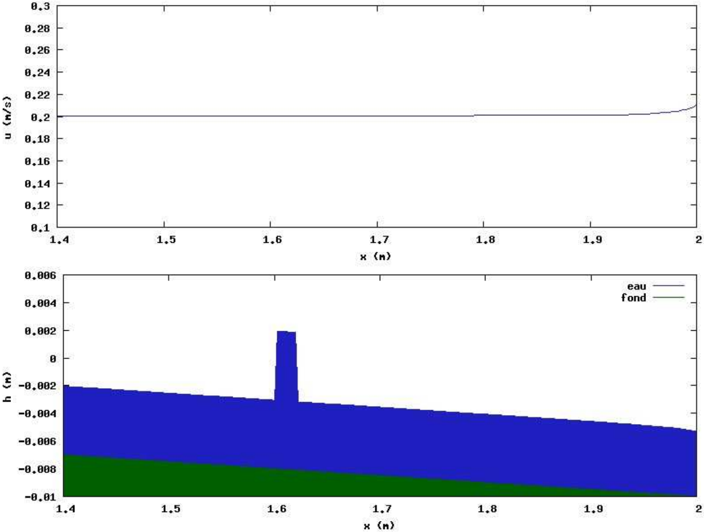
vitesses des ondes $u \pm \sqrt{gh}$.

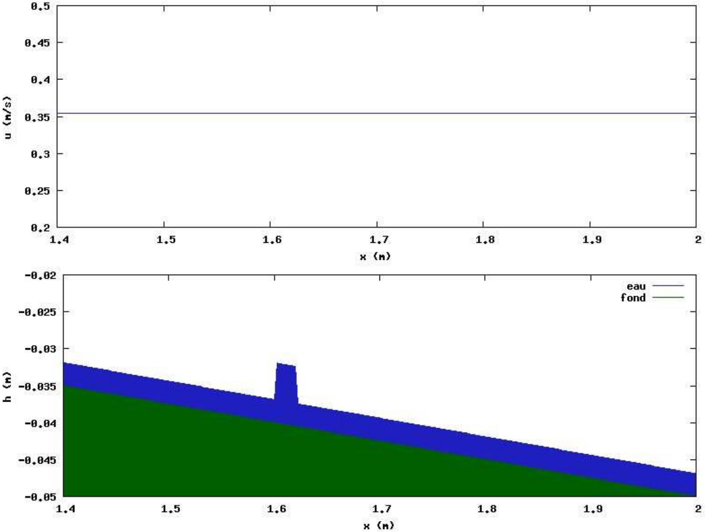
C'est ce qu'on appelle l'**hyperbolicité** : propagation à vitesse finie.

Fleuve ou torrent ?

- $-\sqrt{gh} < u < \sqrt{gh}$, écoulement fluvial
- $|u| > \sqrt{gh}$, écoulement torrentiel

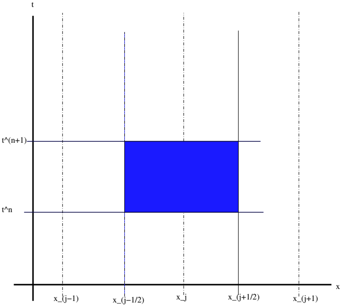
Rien à voir avec la géographie !


u (m/s)
0.3
0.28
0.26
0.24
0.22
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2
x (m)
h (m)
0.006
0.004
0.002
0
-0.002
-0.004
-0.006
-0.008
-0.01
eau
fond
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2
x (m)


0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
u (m/s)
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2
x (m)
-0.02
-0.025
-0.03
-0.035
-0.04
-0.045
-0.05
h (m)
eau
fond
x (m)

Calcul numérique des solutions

Méthode des volumes finis



On intègre

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

sur le volume

$$[t^n, t^{n+1}[\times]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[,$$

et on pose

$$V_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U(t^n, x)\, dx$$

Il vient

$$\Delta x \left[V_j^{n+1} - V_j^n \right] + \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{j+1/2}))\, dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{j-1/2}))\, dt = 0$$

Il vient

$$\Delta x\left[V_j^{n+1}-V_j^n\right]+\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t,x_{j+1/2}))\,dt-\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t,x_{j-1/2}))\,dt=0$$

On choisit une approximation des flux aux interfaces :

$$F_{j+1/2}^n \sim \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t,x_{j+1/2}))\,dt,$$

Il vient

$$\Delta x \left[V_j^{n+1} - V_j^n \right] + \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{j+1/2}))\, dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{j-1/2}))\, dt = 0$$

On choisit une approximation des flux aux interfaces :

$$F_{j+1/2}^n \sim \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{j+1/2}))\, dt,$$

de sorte que la solution approchée (espérée...) sera donnée "de proche en proche" par

$$V_j^{n+1} = V_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n \right]$$

- Chaque choix de $F^n_{j+1/2}$ détermine un schéma aux volumes finis.
- Utilise souvent les valeurs propres de $A(U)$
  d'où problème pour $h = 0$, transition sec/mouillé
- Coupler avec le second membre (topographie $\partial_x z$)
  compatibilité avec les états d'équilibre

Le schéma

$$\frac{d}{dt}U_j + \frac{1}{\Delta t}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) = S_j$$

Le schéma

$$\frac{d}{dt}U_j + \frac{1}{\Delta t}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) = S_j$$

avec

- U_j les variables conservatives,
- $F_{j\pm 1/2}$ les flux numériques,
- S_j discretisation du terme source.

Le schéma

$$\frac{d}{dt}U_j + \frac{1}{\Delta t}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) = S_j$$

avec

- U_j les variables conservatives,
- $F_{j\pm1/2}$ les flux numériques,
- S_j discretisation du terme source.

Ordre 2

- en espace : MUSCL,
- en temps : Runge Kutta (Heun).

flux HLL

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) \text{ si } 0 < c_1 \\ F(U_D) \text{ si } c_2 < 0 \\ \dfrac{c_1 F(U_G) - c_2 F(U_D)}{c_2 - c_1} + \dfrac{c_1 c_2 (U_D - U_G)}{c_2 - c_1} \text{ sinon} \end{cases},$$

avec deux paramètres

$$c_1 < c_2.$$

flux HLL

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) \text{ si } 0 < c_1 \\ F(U_D) \text{ si } c_2 < 0 \\ \dfrac{c_1 F(U_G) - c_2 F(U_D)}{c_2 - c_1} + \dfrac{c_1 c_2 (U_D - U_G)}{c_2 - c_1} \text{ sinon} \end{cases},$$

avec deux paramètres

$$c_1 < c_2.$$

Pour c_1 et c_2, on prend

$$c_1 = \inf_{U=U_G,U_D} \left(\inf_{j\in\{1,2\}} |\lambda_j(U)| \right) \text{ and } c_2 = \sup_{U=U_G,U_D} \left(\sup_{i\in\{1,2\}} |\lambda_i(U)| \right).$$

avec $\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}$.

Etats d'équilibre

Etats d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\partial_t h = \partial_t u = \partial_t q = 0$$

Etats d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} hu = Cte \\ u^2/2 + g(h+z) = Cte \end{array} \right. .$$

Etats d'équilibre

$$\begin{cases} hu = Cte \\ u^2/2 + g(h+z) = Cte \end{cases}.$$

On considère

$$\begin{cases} u = Cte \\ g(h+z) = Cte \end{cases}.$$

Reconstruction hydrostatique [Audusse05] et [Bouchut04]
On définit

$$z^* = max(z_G, z_D)$$

et

$$\begin{cases} U_G^* = (h_G^*, h_G^* u_G), \ U_D^* = (h_D^*, h_D^* u_D) \\ h_G^* = max(h_G + z_G - z^*, 0) \\ h_D^* = max(h_D + z_D - z^*, 0) \end{cases} .$$

Reconstruction hydrostatique

Ainsi on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^*, U_D^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ g({h_G}^2 - (h_G^*)^2)/2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^*, U_D^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ g({h_D}^2 - (h_D^*)^2)/2 \end{pmatrix} \end{array} \right. ,$$

où $\mathcal{F}(U_G, U_D)$ est le flux numérique.

Modèle plus complet

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x(hu) = R \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh(\partial_x z + S_f) \end{array} \right. , \qquad (3)$$

avec

- R la pluie (m/s),
- S_f les frottements.

Frottement

Loi de frottement	$S_f =$
Manning	$\dfrac{u\lvert u\rvert}{K^2 h^{4/3}}$
Darcy-Weisbach	$\dfrac{fu\lvert u\rvert}{gh}$

Traitement des frottements

Traitement des frottements

- Topographie apparente [Bouchut04]
  On considère $z_{app} = z + b$
  où $\partial_x b = S_f$.

Traitement des frottements

- Topographie apparente [Bouchut04]
  On considère $z_{app} = z + b$
  où $\partial_x b = S_f$.
- Semi-implicite [Bristeau01]

$$q_j^{n+1} + \frac{f|q_j^n|q_j^{n+1}}{8h_j^n h_j^{n+1}}\Delta t = q_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_j}(\mathcal{F}_{j+1/2G} - \mathcal{F}_{j-1/2D}).$$

Traitement des frottements

- Topographie apparente [Bouchut04]
  On considère $z_{app} = z + b$
  où $\partial_x b = S_f$.
- Semi-implicite [Bristeau01]

$$q_j^{n+1} + \frac{f|q_j^n|q_j^{n+1}}{8h_j^n h_j^{n+1}}\Delta t = q_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_j}(\mathcal{F}_{j+1/2G} - \mathcal{F}_{j-1/2D}).$$

En notant q_{j*}^{n+1} la partie de droite, on a : $q_j^{n+1} = \frac{q_{j*}^{n+1}}{1+\Delta t \frac{f|u_i^n|}{8h_j^{n+1}}}$.

Test 1 : Solution analytique (Vo Thi Ngoc, M2-MAPMO)

- longueur du canal : 1000 m
- frottement de Manning : $n = 0.033$

Test 1 : Solution analytique (Vo Thi Ngoc, M2-MAPMO)

- longueur du canal : 1000 m
- frottement de Manning : $n = 0.033$
- on cherche une solution stationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x (hu) = 0 \\ \partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) = -gh(\partial_x z + S_f) \end{array} \right. , \qquad (4)$$

Test 1 : Solution analytique (Vo Thi Ngoc, M2-MAPMO)

- longueur du canal : 1000 m
- frottement de Manning : $n = 0.033$
- on cherche une solution stationnaire :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t h + \partial_x(hu) = 0\\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh(\partial_x z + S_f)\end{array}\right. , \qquad (4)$$

$$\partial_t h = \partial_t u = \partial_t q = 0$$

Test 1 : Solution analytique (Vo Thi Ngoc, M2-MAPMO)

- longueur du canal : 1000 m
- frottement de Manning : $n = 0.033$
- on cherche une solution stationnaire :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh(\partial_x z + S_f) \end{cases}, \qquad (4)$$

$$\partial_t h = \partial_t u = \partial_t q = 0$$

d'où

$$\partial_x hu = 0 \Rightarrow q = Cte$$

Test 1 : Solution analytique (Vo Thi Ngoc, M2-MAPMO)

- longueur du canal : 1000 m
- frottement de Manning : $n = 0.033$
- on cherche une solution stationnaire :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh(\partial_x z + S_f) \end{cases}, \qquad (4)$$

$$\partial_t h = \partial_t u = \partial_t q = 0$$

d'où

$$\partial_x hu = 0 \Rightarrow q = 2 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$-\partial_x z = \left(1 - \frac{4}{gh(x)^3}\right) h^{'}(x) + \frac{4n^2}{h(x)^{10/3}}$$

Test 1 : Solution analytique (Vo Thi Ngoc, M2-MAPMO)

- longueur du canal : 1000 m
- frottement de Manning : $n = 0.033$
- On prend la hauteur :

$$h(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{2} \exp\left(-16\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

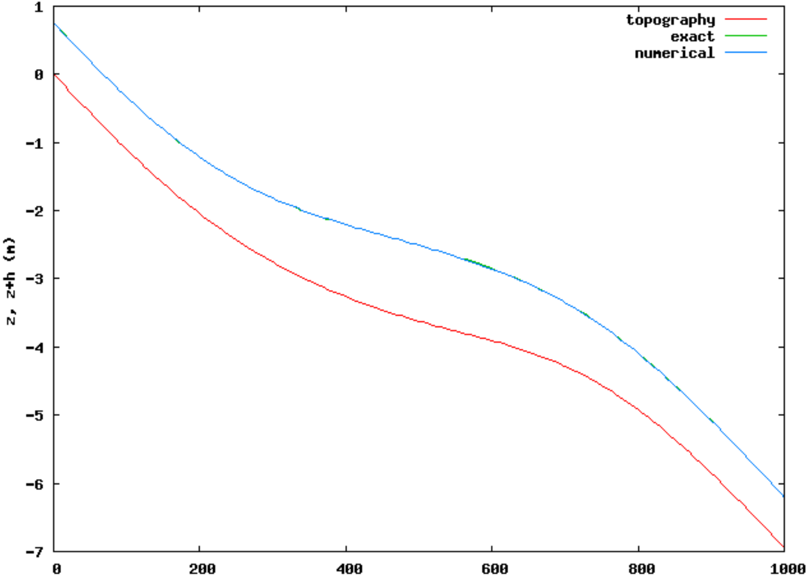
Test 1 : Solution analytique (Vo Thi Ngoc, M2-MAPMO)

- longueur du canal : 1000 m
- frottement de Manning : $n = 0.033$
- On prend la hauteur :

$$h(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{2} \exp\left(-16 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

- On en déduit la topographie : $z(x)$.

Topographie apparente



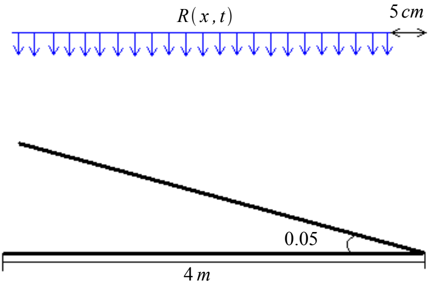
Topographie apparente

Semi-implicite

Test 2 : Expérimental (INRA) & analytique

Données

$$0 \leq t \leq 250\text{s}$$

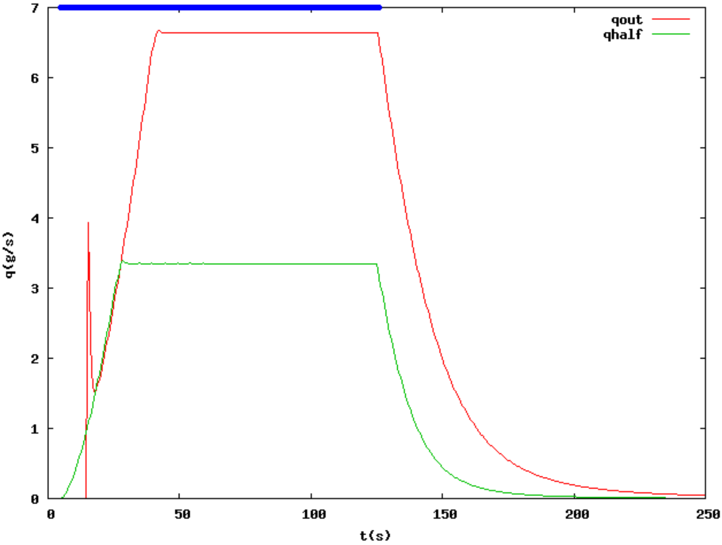


$$R(x,t) = \begin{cases} 50 \text{ mm/h si } (x,t) \in [0, 3.95] \times [5, 125] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

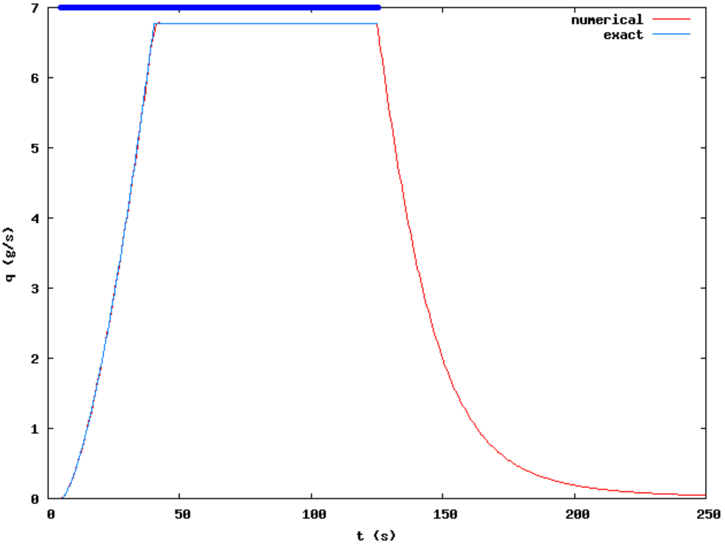
Traitement de la pluie et loi de frottement

- Pluie : $\partial_t h = R$
- Frottement de Darcy-Weisbach : $S_f = \dfrac{fu|u|}{gh}$

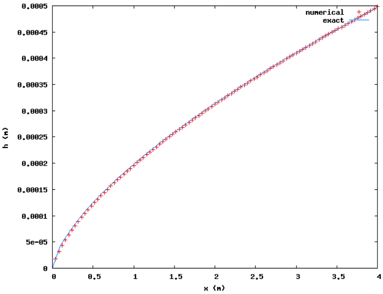
Topographie apparente

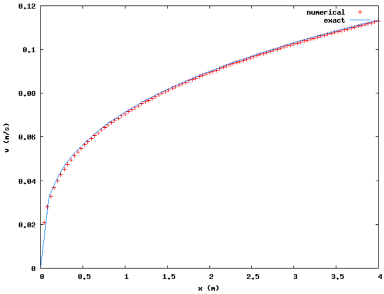


Semi-implicite

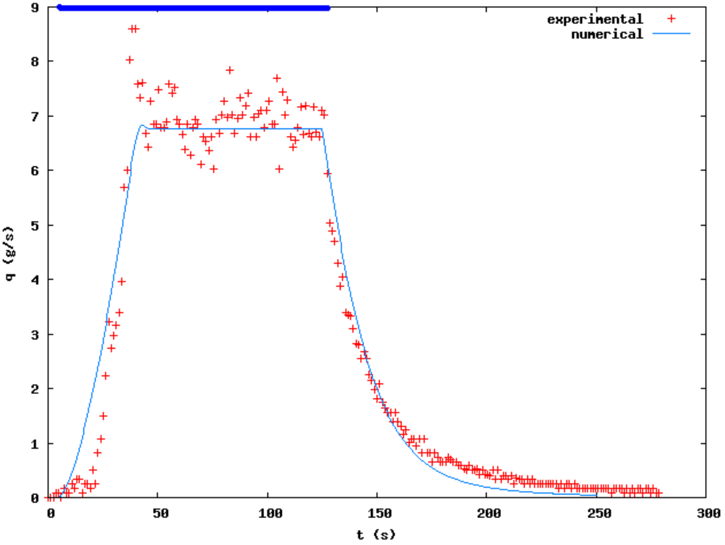


Semi-implicite





Calibration



Conclusion et perspectives

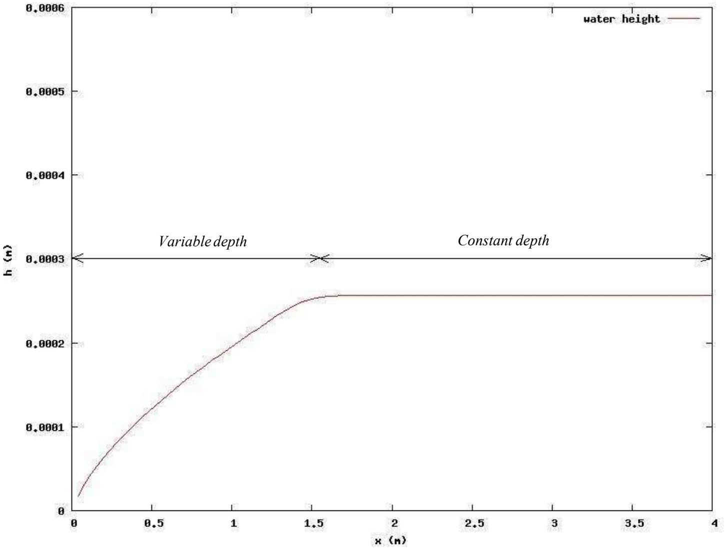
- modifier la méthode de topographie apparente
- simulations 2D (Rousseau, M2-BRGM)

Merci

Les partenaires

Ce travail fait partie du projet ANR METHODE

Nos partenaires


water height
h (m)
x (m)
Variable depth
Constant depth
0.0006
0.0005
0.0004
0.0003
0.0002
0.0001
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

- Audusse E., Bristeau M.-O., A well-balanced positivity preserving "second-order" scheme for shallow water flows on unstructured meshes, *J. Comp. Phys.* **206**, (2005) 311-333.
- Bouchut F., *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser (2004).
- Bristeau M.-O., Coussin B., Boundary conditions for the shallow water equations solved by kinetic schemes, *Inria report* **RR-4282**, (2001).
- Esteves M. et al., Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values, *J. Hydrol.* **228**, (2000), 265-282.