

Transfert interplanétaire à consommation faible

Philippe Augros¹ Maxime Chupin² Thomas Haberkorn³ Emmanuel Trélat²

¹EADS-Astrium
Les Mureaux

²UPMC-LJLL
Université Paris 6

³FDP-MAPMO
Université d'Orléans

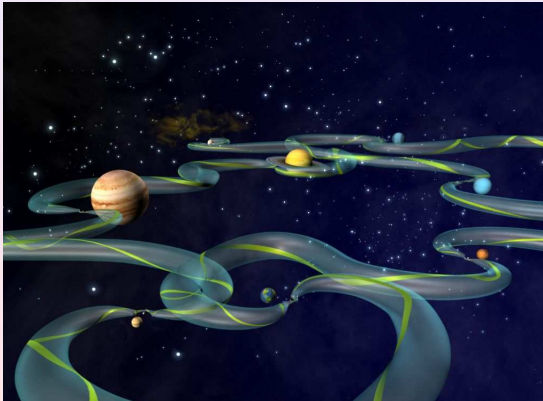
17^{ème} Journée CasCiModOT, 6 Décembre 2012



Transfert interplanétaire

But

- Transfert d'un engin d'un point à un autre du système solaire à faible coût.
- Suivant le mode de propulsion : problème d'optimisation ou de contrôle optimal.



Equations du mouvement

Equations générales

- Modèle général ne prend en compte que l'influence gravitationnelle des différents corps célestes (planètes et soleil ici) :

$$\ddot{q}(t) = -\mu_{\text{SUN}} \frac{q(t) - q_{\text{SUN}}(t)}{\|q(t) - q_{\text{SUN}}(t)\|^3} + \sum_{i=1}^9 \mu_i \left(\frac{q(t) - q_{\text{SUN}}(t)}{\|q(t) - q_i(t)\|^3} \right) + \frac{T(t)}{m(t)},$$

avec q la position, T la poussée et m la masse de l'engin.

- On suppose la masse de l'engin négligable par rapport à celle des corps célestes.
- On peut rajouter d'autres corps (e.g. Lune).

Sphère d'influence

- Approximation consistant à ne prendre en compte que l'attraction gravitationnelle la plus importante.
- ⇒ On a affaire à une succession de problèmes des 2 corps qu'on recollera.



Denis Poisson

Equations du mouvement

Equations générales

- Modèle général ne prend en compte que l'influence gravitationnelle des différents corps célestes (planètes et soleil ici) :

$$\ddot{q}(t) = -\mu_{\text{SUN}} \frac{q(t) - q_{\text{SUN}}(t)}{\|q(t) - q_{\text{SUN}}(t)\|^3} + \sum_{i=1}^9 \mu_i \left(\frac{q(t) - q_{\text{SUN}}(t)}{\|q(t) - q_i(t)\|^3} \right) + \frac{T(t)}{m(t)},$$

avec q la position, T la poussée et m la masse de l'engin.

- On suppose la masse de l'engin négligable par rapport à celle des corps célestes.
- On peut rajouter d'autres corps (e.g. Lune).

Sphère d'influence

- Approximation consistant à ne prendre en compte que l'attraction gravitationnelle la plus importante.
- ⇒ On a affaire à une succession de problèmes des 2 corps qu'on recollera.



Denis Poisson

Modes de propulsion

Principe général

- On se déplace en éjectant de la matière : Force = (efficacité) * (débit de masse).
- L'efficacité dépend de la vitesse d'éjection de la masse : $v_e = I_{sp} g_0$.

Deux catégories de mode de propulsion

● Propulsion chimique :

- Combustion d'un carburant (liquide ou solide).
- Autorise à éjecter beaucoup de masse avec des I_{sp} d'au mieux 450 s.
- Poussée forte (centaines de MN), mais efficacité réduite.
- Durée de poussée courte : modification par ΔV .

● Propulsion électrique :

- Éjection d'ions qui sont accélérés.
- I_{sp} de 1000 à 10000 s.
- Poussée faible (< 1 N) mais grande efficacité.
- Durée de poussée longue (on garde le TT).

Critère

$$\sum_{i=1}^{\#boost} \Delta V_i \text{ (impulsionnel)}$$

ou

$$\int_0^{t_f} |T(t)| dt \text{ (continu)}$$

Modes de propulsion

Principe général

- On se déplace en éjectant de la matière : Force = (efficacité) * (débit de masse).
- L'efficacité dépend de la vitesse d'éjection de la masse : $v_e = I_{sp} g_0$.

Deux catégories de mode de propulsion

- Propulsion chimique :
 - ◇ Combustion d'un carburant (liquide ou solide).
 - ◇ Autorise à éjecter beaucoup de masse avec des I_{sp} d'au mieux 450 s.
 - ◇ Poussée forte (centaines de kN), mais efficacité réduite.
 - ⇒ Durée de poussée courte : modélisation par ΔV .
- Propulsion électrique :
 - ◇ Ejection d'ions qui sont accélérés.
 - ◇ I_{sp} de 1000 à 10000 s.
 - ◇ Poussée faible ($\leq 1 N$) mais grande efficacité.
 - ⇒ Durée de poussée longue : on garde le $T(t)$.

Critère

$$\sum_{i=1}^{\#boost} \Delta V_i \text{ (impulsionnel)}$$

ou

$$\int_0^{t_f} |T(t)| dt \text{ (continu)}$$



Denis Poisson



Modes de propulsion

Principe général

- On se déplace en éjectant de la matière : Force = (efficacité) * (débit de masse).
- L'efficacité dépend de la vitesse d'éjection de la masse : $v_e = I_{sp} g_0$.

Deux catégories de mode de propulsion

- Propulsion chimique :
 - ◇ Combustion d'un carburant (liquide ou solide).
 - ◇ Autorise à éjecter beaucoup de masse avec des I_{sp} d'au mieux 450 s.
 - ◇ Poussée forte (centaines de kN), mais efficacité réduite.
 - ⇒ Durée de poussée courte : modélisation par ΔV .
- Propulsion électrique :
 - ◇ Ejection d'ions qui sont accélérés.
 - ◇ I_{sp} de 1000 à 10000 s.
 - ◇ Poussée faible ($\leq 1 N$) mais grande efficacité.
 - ⇒ Durée de poussée longue : on garde le $T(t)$.

Critère

$$\sum_{i=1}^{\#boost} \Delta V_i \text{ (impulsionnel)}$$

ou

$$\int_0^{t_f} |T(t)| dt \text{ (continu)}$$

Dynamique du problème des 2 corps

Equation de Kepler contrôlée

$$\ddot{q} = -q \frac{\mu}{r^3} + \frac{F}{m}$$

$q \in \mathbb{R}^3$: position, $r = |q|$, F : poussée, m masse :

$$\dot{m} = -\beta |F| = -\frac{1}{g_0 I_{sp}} |F|$$



Contrainte de poussée maximale

$$|F| = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \leq F_{\max}$$

Transfert d'orbite classique : $\max m(t_f)$

D'une orbite initiale excentrique et inclinée vers une orbite *géostationnaire*.

Pour transfert interplanétaire

Transfert d'une orbite elliptique à une orbite hyperbolique de libération ou inversement.



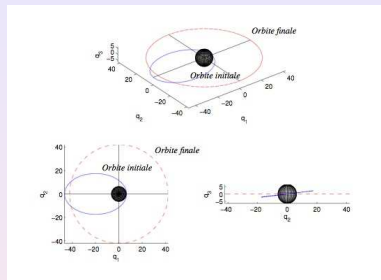
Dynamique du problème des 2 corps

Equation de Kepler contrôlée

$$\ddot{q} = -q \frac{\mu}{r^3} + \frac{F}{m}$$

$q \in \mathbb{R}^3$: position, $r = |q|$, F : poussée, m masse :

$$\dot{m} = -\beta |F| = -\frac{1}{g_0 I_{sp}} |F|$$



Contrainte de poussée maximale

$$|F| = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \leq F_{\max}$$

Transfert d'orbite classique : $\max m(t_f)$

D'une orbite initiale excentrique et inclinée vers une orbite **géostationnaire**.

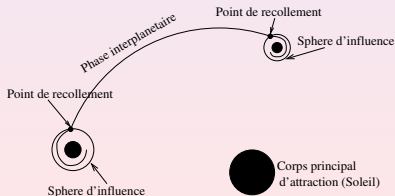
Pour transfert interplanétaire

Transfert d'une orbite elliptique à une orbite hyperbolique de libération ou inversement.

Approche Patch-Conic (recollement de coniques)

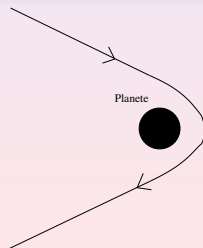
Recollement

- Interplanétaire \approx succession de problèmes aux 2 corps définis sur les sphères d'influences respectives.
- Besoin de recoller les différentes phases, généralement fait en imposant une manœuvre aux intersection (discontinuité de la vitesse = ΔV).



Assistance Gravitationnelle

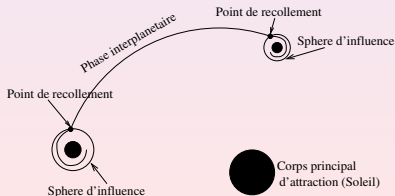
- Possibilité d'utiliser une planète comme foyer d'une trajectoire hyperbolique
- \Rightarrow Conservation de l'énergie en l'absence de manœuvre : modifie la *direction* de la trajectoire.
- \Rightarrow Manœuvre à coût nul, appelé *swing-by*.



Approche Patch-Conic (recollement de coniques)

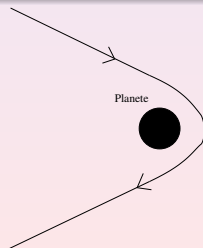
Recollement

- Interplanétaire \approx succession de problèmes aux 2 corps définis sur les sphères d'influences respectives.
- Besoin de recoller les différentes phases, généralement fait en imposant une manœuvre aux intersection (discontinuité de la vitesse = ΔV).



Assistance Gravitationnelle

- Possibilité d'utiliser une planète comme foyer d'une trajectoire hyperbolique
- ⇒ Conservation de l'énergie en l'absence de manœuvre : modifie la *direction* de la trajectoire.
- ⇒ Manœuvre à coût nul, appelé *swing-by*.



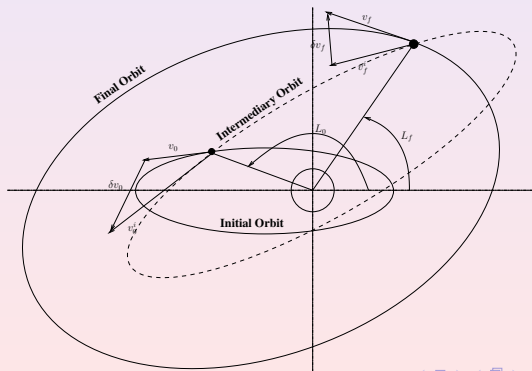
Sous-problème dans la sphère d'influence : modélisation impulsionnelle

Idée : changement instantané d'orbites \rightarrow orbite intermédiaire.

Contrôle : 1 ou 2 incréments de vitesse ΔV_1 et ΔV_2 .

Contraintes : orbite intermédiaire intersecte les orbites initiales et finales.

Il s'agit d'un problème d'optimisation et pas de contrôle optimal



Sous-problème dans la sphère d'influence : modélisation continue

Idée : déformation continue de l'orbite

Système de contrôle (dynamique)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

Coût

$$C(t_f, u) = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt$$

Problème de contrôle optimal

Déterminer les trajectoires $x(\cdot)$ solutions de (1), telles que $x(0) \in M_0$, $x(t_f) \in M_1$, et minimisant le coût $C(t_f, u)$.



Méthodes numériques

- 1 méthodes directes
- 2 méthodes indirectes



Méthodes directes

Problème de contrôle optimal

$$\min C(t_f, u)$$

$$\text{sur } \{u \mid \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x_u(0) \in M_0, x_u(t_f) \in M_1\}$$

Discrétisation totale

⇒ problème d'optimisation non linéaire en dimension finie :

$$\begin{aligned} \min F(Z), \\ g(Z) = 0 \\ h(Z) \leq 0 \end{aligned}$$

où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$.

→ **Résolution numérique** : Méthodes de gradient, pénalisation, SQP, points intérieurs, etc.

Ou encore : résolution numérique de l'équation d'Hamilton-Jacobi (méthodes explicites, méthodes de front d'onde, ...)



Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(Multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$



Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(Multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

↙

$$u(t) = u(x(t), p(t))$$



Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(Multiplieurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

$$u(t) = u(x(t), p(t))$$



Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(Multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

$$u(t) = u(x(t), p(t))$$

⇒ Les *extrémales* (x, p) sont solutions de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p(0) = p_0,$$

→ **Méthode de tir** :
déterminer p_0 t.q. $x(t_f) = x_1$.



Problème *path-conic* complet

2 niveaux d'optimisation classique

- Chaque transfert dans une sphère d'influence est un problème d'optimisation ou de contrôle optimal.
- L'optimisation doit également se faire sur les conditions de recollement.

Scénario non fixé

Le nombre d'étapes intermédiaires n'est pas forcément fixé \Rightarrow à optimiser (combinatoire).

Nécessité de savoir résoudre le problème à scénario fixé le plus efficacement possible.



Le problème circulaire restreint des 3 corps

Dynamique d'un corps de masse négligeable dans le champ gravitationnel de 2 objets (étoiles/planètes) de masses m_1 et m_2 (primaires) ayant des orbites circulaires :

Equations du mouvement (repère tournant)

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

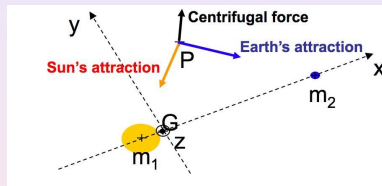
avec

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2},$$

et

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}.$$



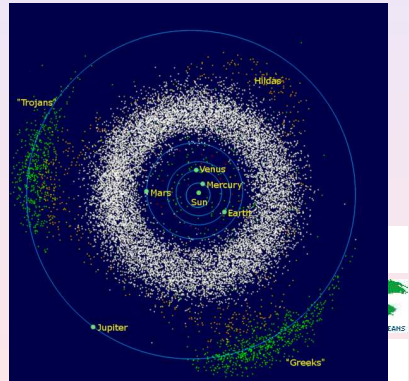
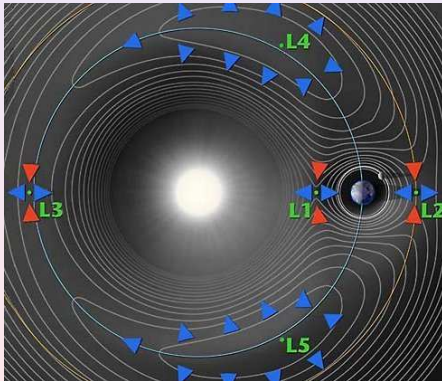
- les trajectoires du problème des 2 corps sont coûteuses en consommation
- but : élaborer des trajectoires de transfert peu coûteuses



Points de Lagrange

La dynamique a 5 points d'équilibre :

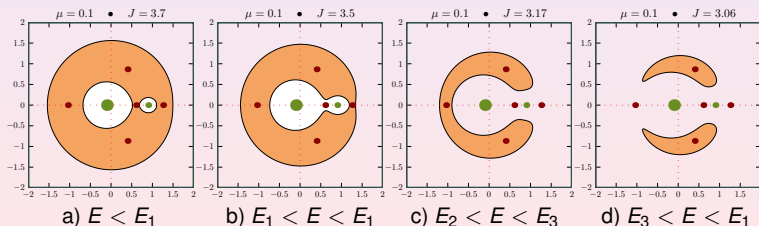
- 3 points colinéaires : L_1 , L_2 , L_3 (instables) ;
- 2 points équilatéraux : L_4 , L_5 (stables).



Régions de Hill

Intégrale du mouvement

- Intégrale du mouvement : $E(X) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)$
 - Intégrale de Jacobi : $J(X) = -2E(X)$
 - A énergie donnée e : $M(\mu, e) = \{X = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) | E(X) = e\}$
 - Région de Hill : $H(\mu, e) = \{(x, y, z) | U(x, y, z) \leq e\}$
 - On note E_i l'énergie intégrale au point L_i : $E_1 < E_2 < E_3 < E_4 = E_5$
- ⇒ Cartographie les positions accessibles sans manœuvre.



Trajectoires périodiques

Trajectoires périodiques

On peut montrer l'existence de trajectoires périodiques autour des points d'équilibre (découle d'un théorème de Moser, le linéarisé n'apporte pas directement d'info).

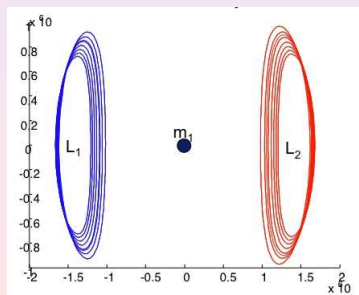


Trajectoires périodiques

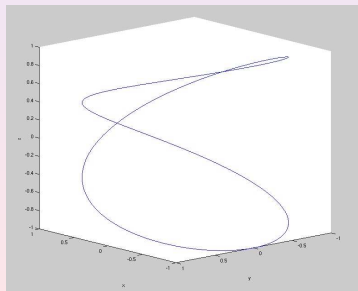
Trajectoires périodiques

On peut montrer l'existence de trajectoires périodiques autour des points d'équilibre (découle d'un théorème de Moser, le linéarisé n'apporte pas directement d'info).

Orbites de Halo (isomorphe à une ellipse)



Orbites de Lissajous (les autres)



Variétés invariantes

Variétés invariantes

- De ces orbites sont issues des variétés invariantes (par le flot de la dynamique) stables et instables (obtenues par application d'un résultat de Lyapunov-Poincaré)
- Elles forment des *couloirs de gravités* dont la position intersecte les variétés invariantes des autres points de Lagrange (e.g. de L_1 Terre-Lune à L_2).

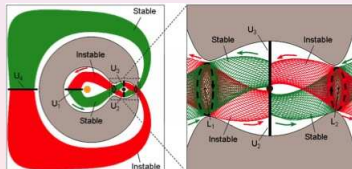


Variétés invariantes

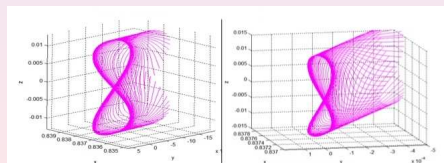
Variétés invariantes

- De ces orbites sont issues des variétés invariantes (par le flot de la dynamique) stables et instables (obtenues par application d'un résultat de Lyapunov-Poincaré)
- Elles forment des *couloirs de gravités* dont la position intersecte les variétés invariantes des autres points de Lagrange (e.g. de L_1 Terre-Lune à L_2).

Couloirs issus de Halo



Zoom sur couloirs de Lissajous



Utilisation des couloirs de gravité

Les étapes

En ne considérant que les 2 corps et l'engin, le transfert de l'un à l'autre se déroule en 3 phases :

- i) manœuvre d'évasion du corps de départ pour *parking* sur variété stable de L_i .
- ii) manœuvre à l'approche de l'orbite de halo de L_i pour *parking* sur variété instable de L_i (pour accélérer les choses).
- iii) manœuvre de capture par le corps cible

Optimisation ou contrôle optimal

Comme pour l'approche patch-conic :

- modélisation impulsionnelle des manœuvres \rightarrow (NLP),
- ou modélisation continue plus réaliste \rightarrow (OCP).

Problème complet

- Ré-injecter la solution optimale sur le problème des 3 corps dans le champ gravitationnel complet (puis relancer l'optimisation).
- Ou faire au préalable du recollement de 3 corps

L

UNIVERSITÉ
D'ORLÈANS

Denis Polson



Utilisation des couloirs de gravité

Les étapes

En ne considérant que les 2 corps et l'engin, le transfert de l'un à l'autre se déroule en 3 phases :

- i) manœuvre d'évasion du corps de départ pour *parking* sur variété stable de L_i .
- ii) manœuvre à l'approche de l'orbite de halo de L_i pour *parking* sur variété instable de L_i (pour accélérer les choses).
- iii) manœuvre de capture par le corps cible

Optimisation ou contrôle optimal

Comme pour l'approche patch-conic :

- modélisation impulsionnelle des manœuvres \rightarrow (NLP),
- ou modélisation continue plus réaliste \rightarrow (OCP).

Problème complet

- Ré-injecter la solution optimale sur le problème des 3 corps dans le champ gravitationnel complet (puis relancer l'optimisation).
- Ou faire au préalable du recollement de 3 corps



Denis Polson



Utilisation des couloirs de gravité

Les étapes

En ne considérant que les 2 corps et l'engin, le transfert de l'un à l'autre se déroule en 3 phases :

- i) manœuvre d'évasion du corps de départ pour *parking* sur variété stable de L_i .
- ii) manœuvre à l'approche de l'orbite de halo de L_i pour *parking* sur variété instable de L_i (pour accélérer les choses).
- iii) manœuvre de capture par le corps cible

Optimisation ou contrôle optimal

Comme pour l'approche patch-conic :

- modélisation impulsionnelle des manœuvres \rightarrow (NLP),
- ou modélisation continue plus réaliste \rightarrow (OCP).

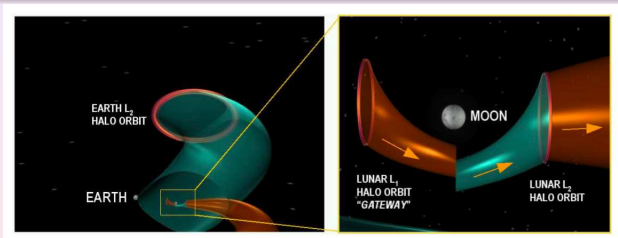
Problème complet

- Ré-injecter la solution optimale sur le problème des 3 corps dans le champ gravitationnel complet (puis relancer l'optimisation).
- Ou faire au préalable du recollement de 3 corps

Exemple classique : transfert Terre-Lune

Transfert Terre-Lune

- S'évader d'une orbite terrestre à un variétés stables de L_1 .
- Passer de la variété stable de L_1 à une instable de L_1 .
- Se faire capturer par la Lune ou sauter sur une variété stable de L_2 pour partir plus loin.



Intérêt des couloirs de gravité

- Coût en ΔV (\Leftrightarrow consommation) bien inférieur à patch-conic.
- Temps de transfert plus long qu'approche patch-conic (1 semaine contre 3 mois à 1 an).



Denis Polson



Conclusions/Perspectives

Conclusions

- Dans la littérature actuelle, surtout approche impulsionnelle
- ⇒ peu en accord avec la réalité des missions interplanétaires.
- Quand modèle continu, utilisation de méthodes de résolutions directes
- ⇒ gourmand en ressources de calcul et en temps.

Perspectives

- Thèse CIFRE débutée par Maxime Chupin (avec EADS Astrium, les Mureaux).
- S'intéresser plus particulièrement au modèle continu.
- Utiliser le problème des 3 corps pour initialiser les approches numériques.
- Utiliser une approche indirecte probablement par continuation (introduction graduelle des autres corps) pour le problème complet.



Conclusions/Perspectives

Conclusions

- Dans la littérature actuelle, surtout approche impulsionnelle
 - ⇒ peu en accord avec la réalité des missions interplanétaires.
- Quand modèle continu, utilisation de méthodes de résolutions directes
 - ⇒ gourmand en ressources de calcul et en temps.

Perspectives

- Thèse CIFRE débutée par Maxime Chupin (avec EADS Astrium, les Mureaux).
- S'intéresser plus particulièrement au modèle continu.
- Utiliser le problème des 3 corps pour initialiser les approches numériques.
- Utiliser une approche indirecte probablement par continuation (introduction graduelle des autres corps) pour le problème complet.

