Ondes gravitationnelles dans des systèmes binaires à grand rapport de masse

17eme journée CaSciModOT

RITTER Patxi

(LPC2E - MAPMO)

Plan

- Ondes gravitationnelles

- Modélisation dans le cas des EMRIs

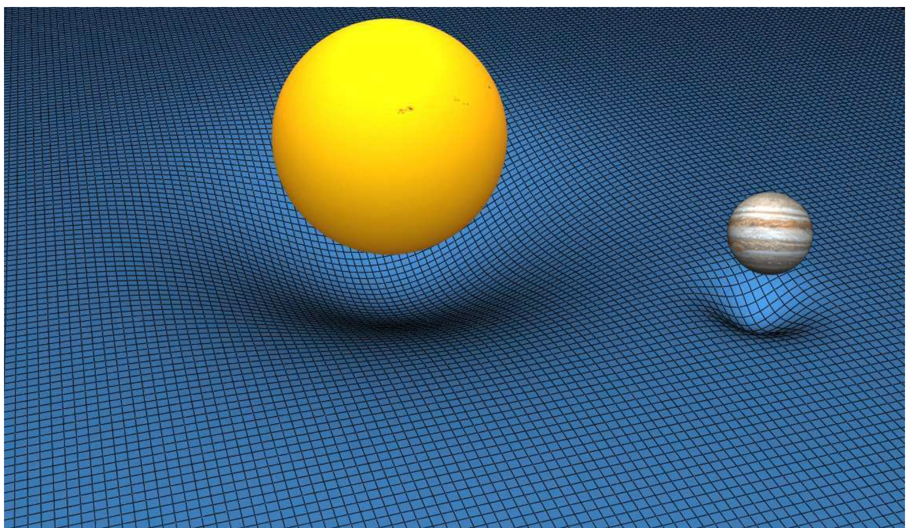
- Optimisation du code de calcul

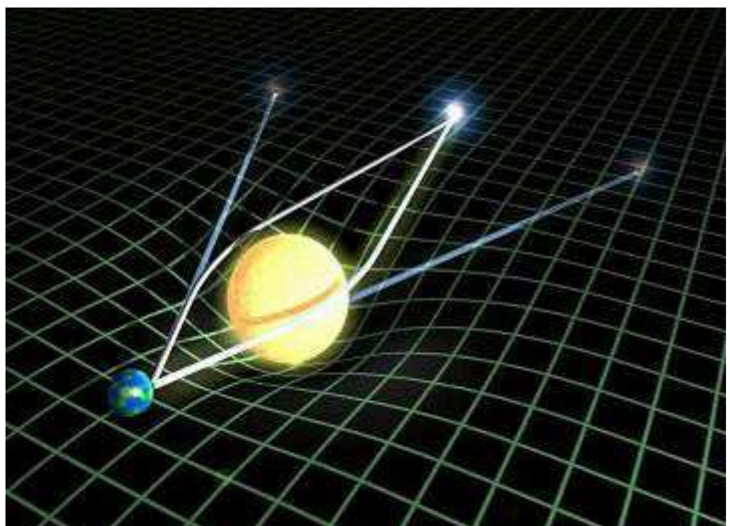
- Réaction de radiation

Ondes gravitationnelles

- Relativité Générale : Cadre formel décrivant l'interaction entre matière et géométrie de l'espace-temps (Einstein 1915).
- Espace-temps : Variété différentielle décrite localement par les 10 composantes du tenseur metrique $g_{\mu\nu}$ obéissant à l'équation de champ d'Einstein

$$\underbrace{\boxed{G_{\mu\nu}\left[g_{\mu\nu}\right]}}_{\text{Géométrie}} = \underbrace{\boxed{\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}\left[g_{\mu\nu}\right]}}_{\text{Matière}}$$





Ondes gravitationnelles

- Onde Gravitationnelle (OG) : déformation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à la vitesse de la lumière.

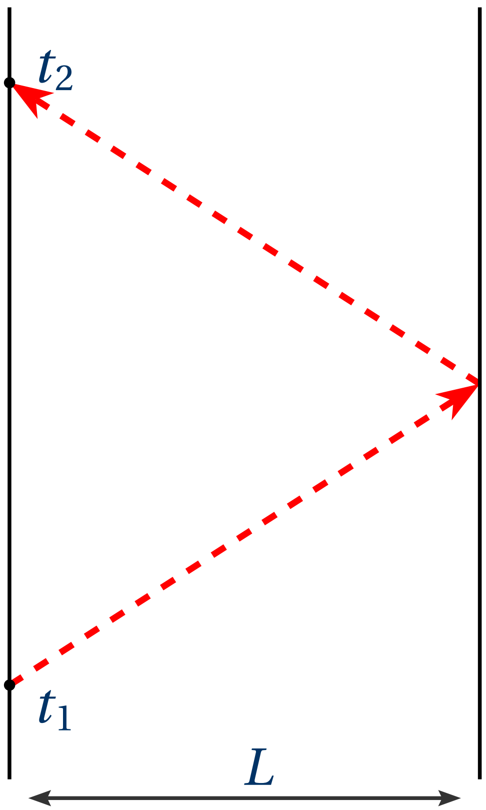
- OG engendrées par le mouvement et la dynamique de la source.

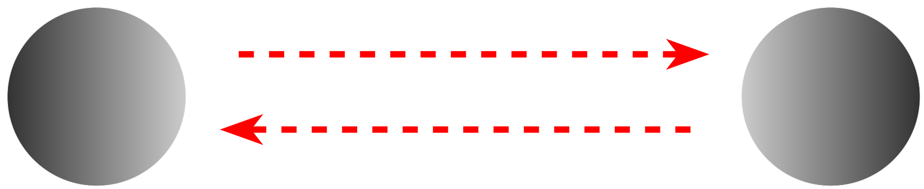
Ondes gravitationnelles

- Onde Gravitationnelle (OG) : déformation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à la vitesse de la lumière.

- OG engendrées par le mouvement et la dynamique de la source.

- Mesure de variation relative de distance entre 2 points matériels (par interférométrie).





$$L = \frac{1}{2}c\left(t_2 - t_1\right)$$

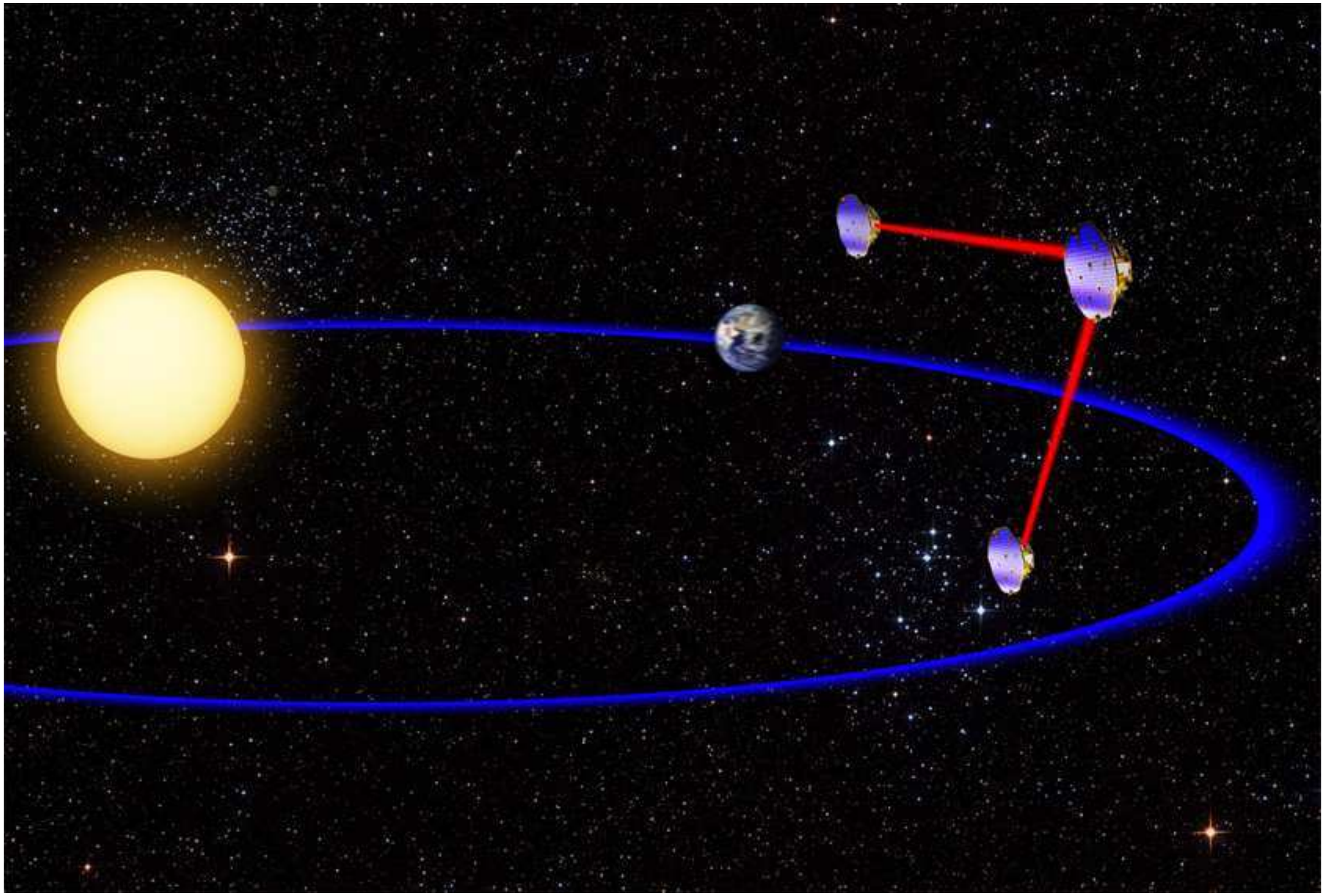
Variation de la longueur L au passage d'une OG

$$\delta L / L \approx 10^{-21} \text{ !!}$$

Ondes gravitationnelles

Détecteur interférométrique VIRGO sur le site de Cascina, près de Pise
Cibles : TN binaire ($5M_\odot < M < 20M_\odot$), pulsar binaire ($1.4M\odot$).
Bande de fréquence : 10Hz - 1kHz

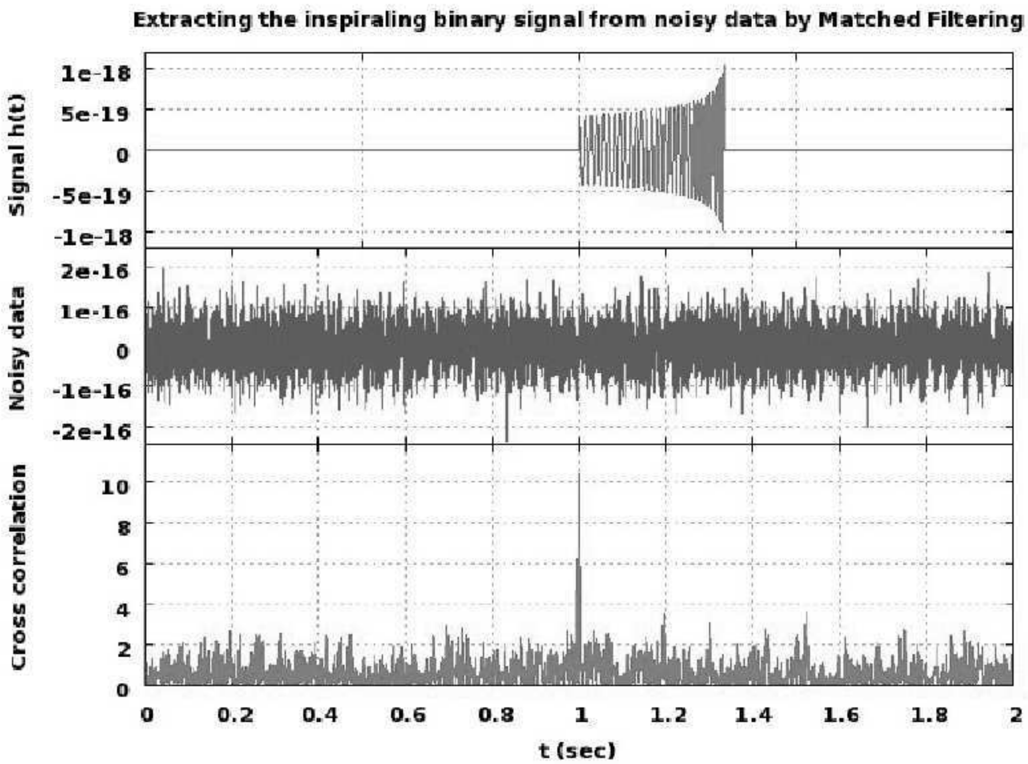
Ondes gravitationnelles



Laser Interferometer Space Antenna (LISA/NGO)
Cibles : TN super-massifs ($10^6 M_\odot < M < 10^8 M_\odot$), EMRIs.
Bande de fréquence : 10^{-4}Hz - 0.1Hz

Modélisation, cas des EMRIs

Intérêt de la modélisation :

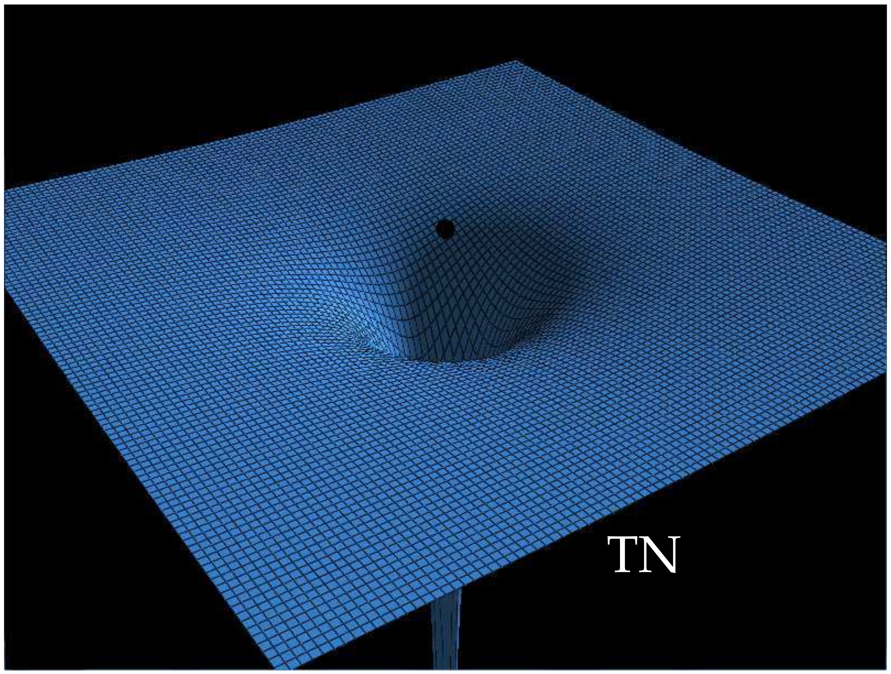


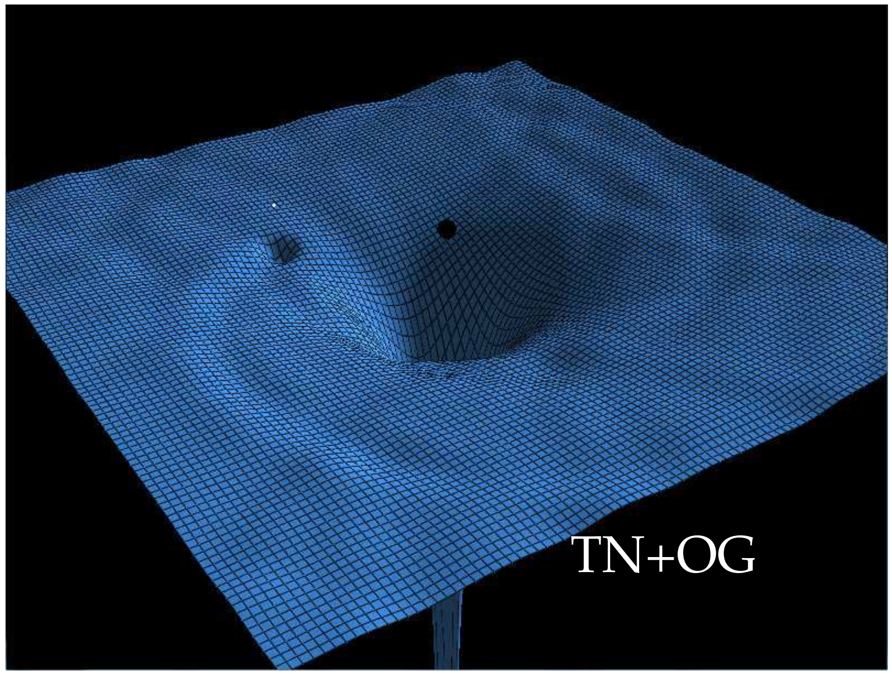
- Dans la technique de filtres adaptés on corrèle la sortie bruitée du détecteur avec la forme d'onde prédite par la théorie ou patron d'onde.
- Le patron d'onde doit rester en phase avec la forme d'onde exacte aussi longtemps que possible.

Modélisation, cas des EMRIs

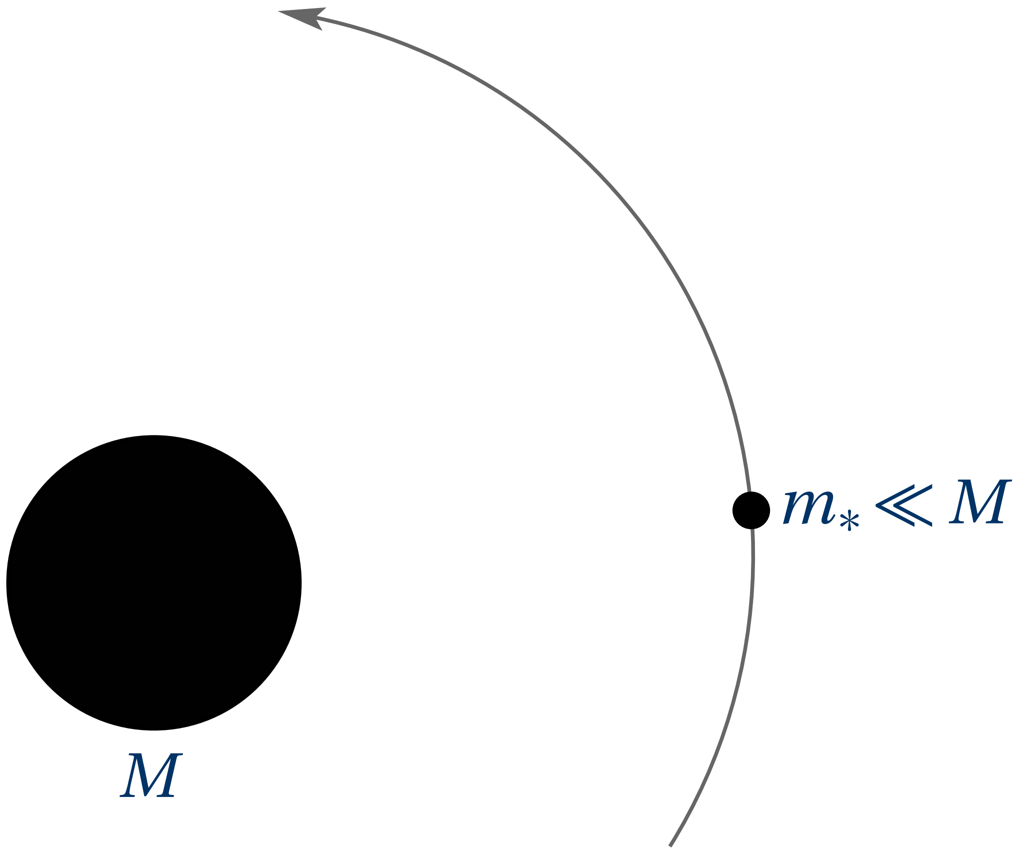
- Trou noir (TN) : Objet compact formant une singularité de l'espace-temps = degré de courbure infini

- Liens intimes entre trous noirs et OG
  - TN et OG sont des distorsions de l'espace-temps (extrême pour le TN, minime pour les OG)
  - TN et OG sont tous deux solutions du vide des équations d'Einstein.

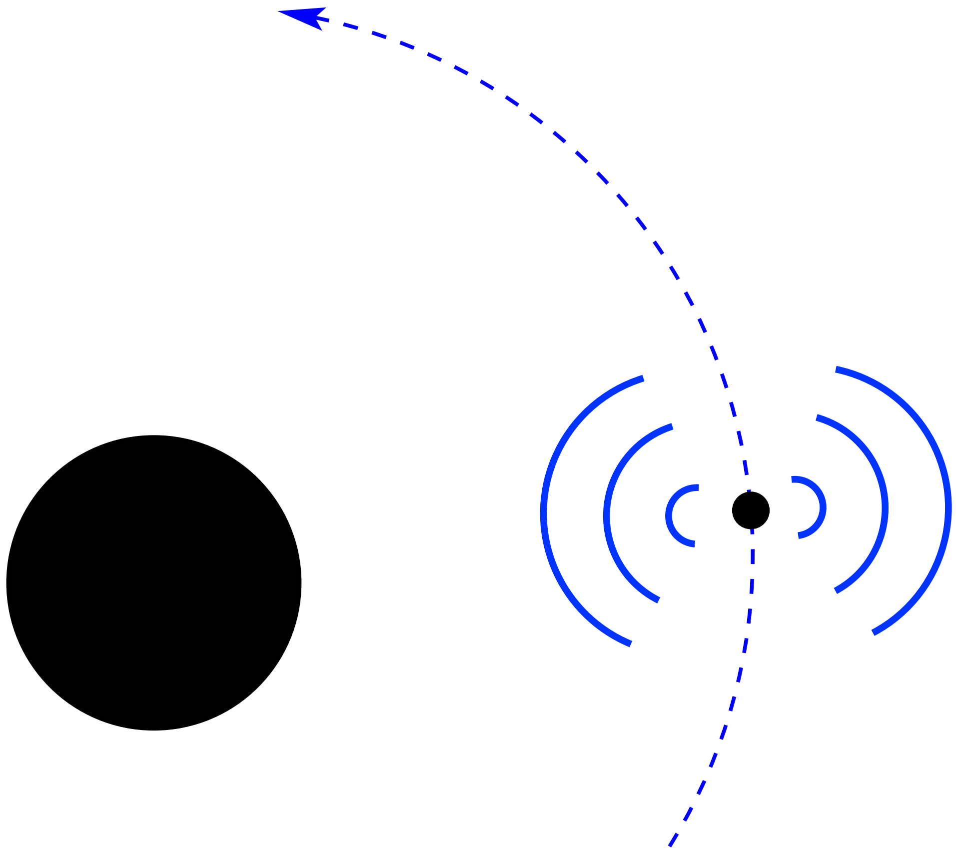




Modélisation, cas des EMRIs



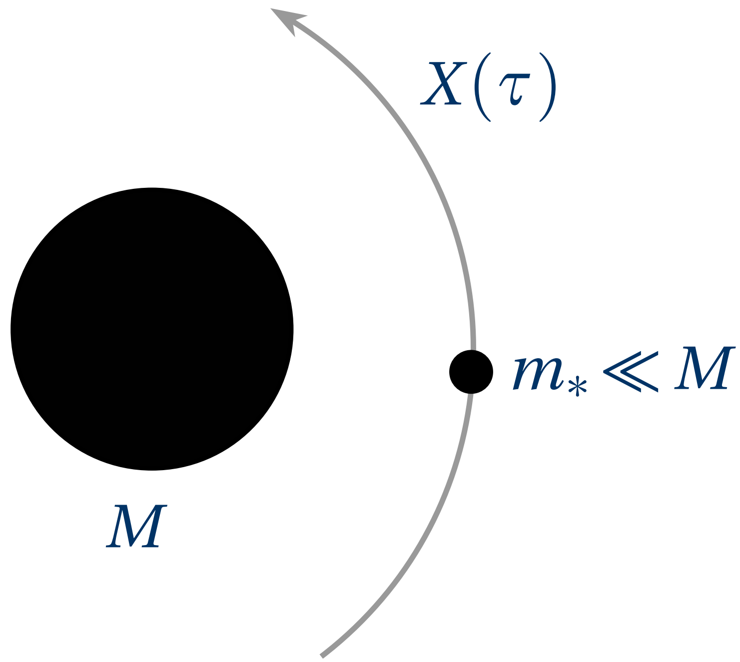
Modélisation, cas des EMRIs



Modélisation, cas des EMRIs

- Extreme Mass Ratio Inspiral
- Perturbation de la métrique

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{Trou Noir}} + h_{\mu\nu}$$
$$h_{\mu\nu} \sim O(m_*/M)$$



- Linéarisation des équations de champ

$$G_{\mu\nu}\left[g_{\mu\nu}^{\text{Trou Noir}} + h_{\mu\nu}\right] = \frac{8\pi G}{c^4}\delta T_{\mu\nu}$$

- Etoile supposée ponctuelle

$$\delta T_{\mu\nu} = m_* \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(4)}(x^\alpha - X^\alpha(\tau)) \frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau} d\tau$$

- Décomposition sur une base d'harmoniques tensoriels

$$h_{\mu\nu} = \sum_{\ell,m}\sum_{i=1}^{10} h^{(i)\ell m}(r,t)\, Y_{\mu\nu}^{(i)\ell m}(\theta,\phi)$$

Modélisation, cas des EMRIs

Equation de Regge-Wheeler-Zerilli

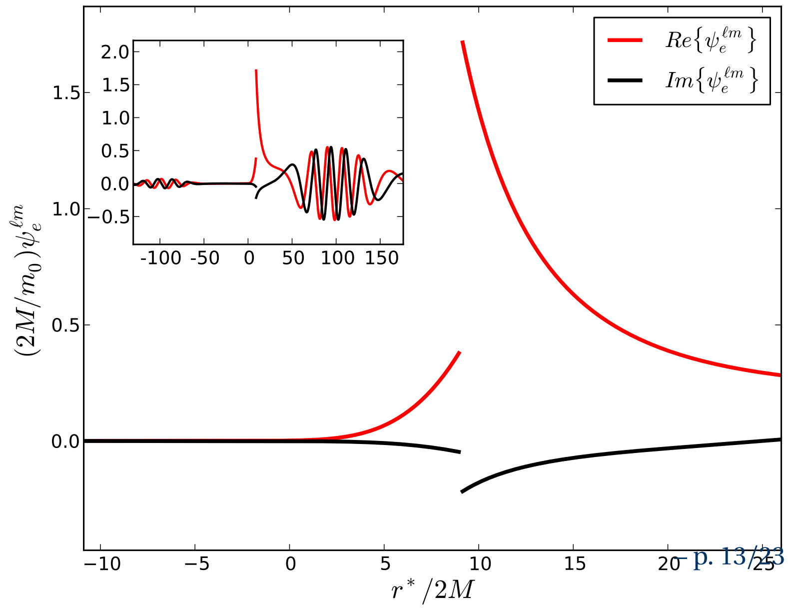
$$\boxed{\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}-V_{e/o}(r)^{\ell}\right]\psi^{\ell m}_{e/o}(r,t)=F^{\ell m}_{e/o}(t)\frac{\partial}{\partial r}\delta\left(r-R(t)\right)+G^{\ell m}_{e/o}(t)\delta\left(r-R(t)\right)}$$

- $\left.\begin{array}{l}\psi^{\ell m}_{e}\text{fonction d'onde paire}\\ \psi^{\ell m}_{o}\text{fonction d'onde impaire}\end{array}\right\}$ exprimées à partir des $h^{(i)\ell m}$
- Discontinues à la position de la particule.
- Liées à l'énergie du système $\frac{dE}{dt}=\frac{1}{64}\sum_{\ell m}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\left[|\psi^{\ell m}_{e}|^2+|\psi^{\ell m}_{o}|^2\right]$

$V^{\ell}_{e/o}, F^{\ell m}_{e/o}, G^{\ell m}_{e/o}$ fonctions analytiques

$r*=r+2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right)$ coordonnée tortue

$R(t)$ trajectoire de la particule



Modélisation, cas des EMRIs

Exemple pour des orbites génériques $\{t, R(t), \Theta(t), \Phi(t)\}$

$$F_o^{\ell m}(t) = \frac{8K}{\lambda} R\left(\dot{R}^2 - f(R)^2\right) \bar{A}^{\ell m}$$

$$G_o^{\ell m}(t) = -\frac{8K}{\lambda} R\dot{R} \frac{d\bar{A}^{\ell m}}{dt} - \frac{8K}{\lambda}\left[\frac{R}{U^0}\frac{d}{dt}(U^0\dot{R}) + \left(\dot{R}^2 - f(R)\right)\right]\bar{A}^{\ell m}$$

$$V_o^{\ell}(r) = 2f(r)\left(\frac{\lambda+1}{r^2} - \frac{3M}{r^3}\right)$$

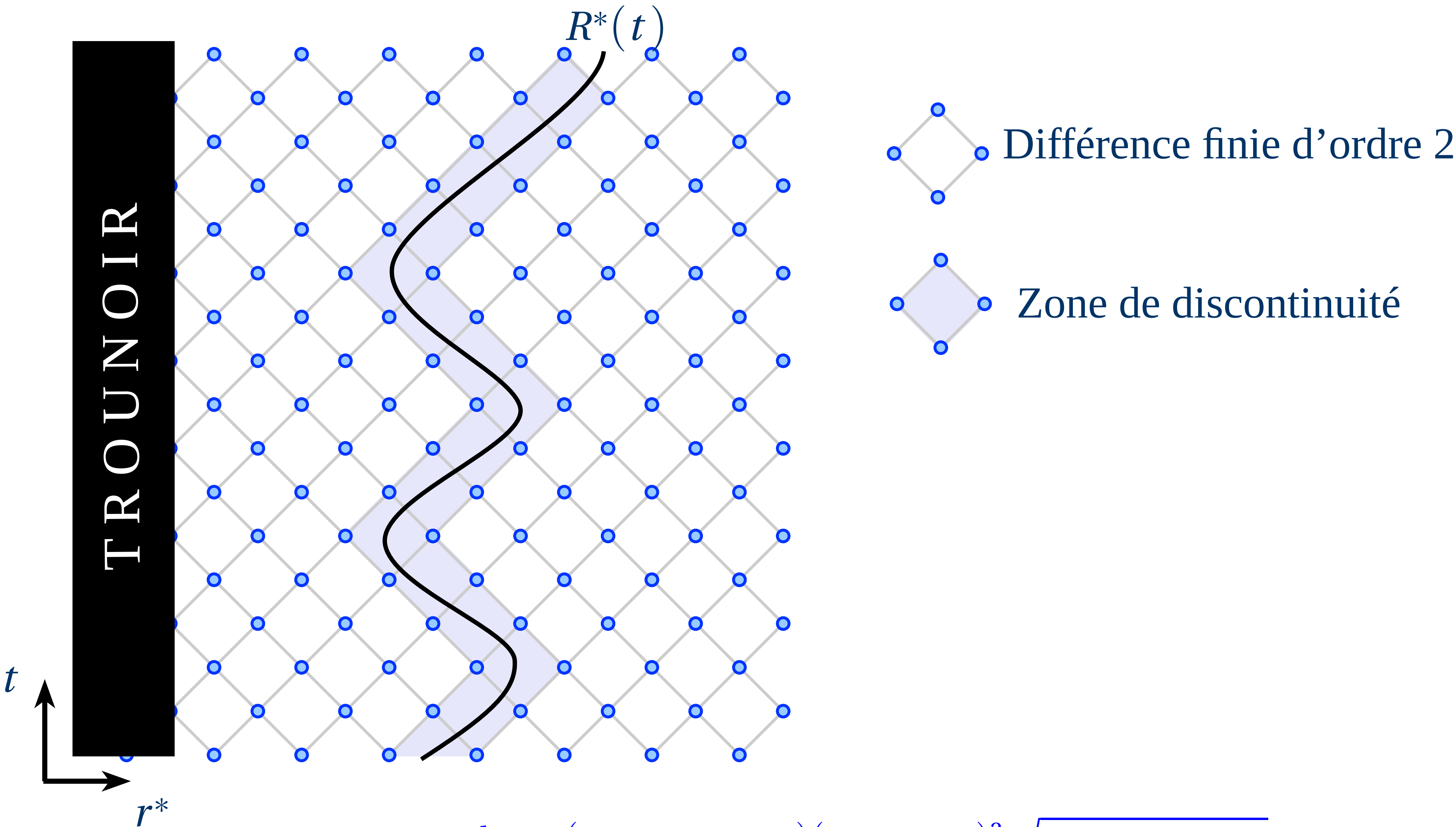
$$F_e^{\ell m}(t) = -8K\frac{Rf(R)\,(\dot{R}^2 - f(R)^2)}{\lambda R + 3M}\bar{Y}^{\ell m}$$

$$\begin{aligned} G_e^{\ell m}(t) =& 16K\frac{R\dot{R}f(R)}{\lambda R+3M}\frac{d\bar{Y}^{\ell m}}{dt} - 16\frac{K}{\lambda}Rf(R)\dot{\Theta}\dot{\Phi}\partial_\phi\left(\partial_\theta - \cot\Theta\right)\bar{Y}^{\ell m} + 8K\frac{R^2 f(R)^2}{\lambda R+3M}\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\dot{\Phi}^2\right)\bar{Y}^{\ell m} \\ & -4\frac{K}{\lambda}Rf(R)\left(\dot{\Theta}^2 - \sin^2\Theta\dot{\Phi}^2\right)\left(\partial_\theta^2 - \cot\Theta\partial_\theta - \frac{1}{\sin^2\Theta}\partial_\phi^2\right)\bar{Y}^{\ell m} \\ & +8K\frac{\dot{R}^2\left[(\lambda+1)(6RM+\lambda R^2)+3M^2\right]}{R(\lambda R+3M)^2}\bar{Y}^{\ell m} - 8K\frac{f(R)^2\left[R^2\lambda(\lambda+1)+6\lambda RM+15M^2\right]}{R(\lambda R+3M)^2}\bar{Y}^{\ell m} \end{aligned}$$

$$V_e^{\ell}(r) = 2f(r)\frac{\left[\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 3\lambda^2 M r^2 + 9\lambda M^2 r + 9M^3\right]}{r^3(\lambda r+3M)^2}$$

où $K = (\pi\, m_0\, U^0)/(\lambda+1)$, $\lambda = \frac{1}{2}(\ell-1)(\ell+2)$, $f(r) = 1 - 2M/r$ et $A^{\ell m} = \left(\frac{\dot{\Theta}}{\sin\Theta}\partial_\phi - \sin\Theta\dot{\Phi}\partial_\theta\right)Y^{\ell m}$

Modélisation, cas des EMRIs

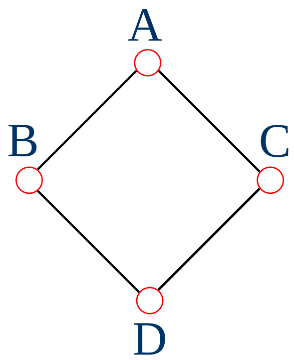


$$R(\chi) = \frac{pM}{1 + e\cos\chi}, \qquad \frac{d\chi}{dt} = \frac{(p-2-2e\cos\chi)(1+e\cos\chi)^2}{Mp^2}\sqrt{\frac{p-6-2e\cos\chi}{(p-2)^2-4e^2}}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{(p-2-2e\cos\chi)(1+e\cos\chi)^2}{p^{3/2}M\sqrt{(p-2)^2-4e^2}}$$

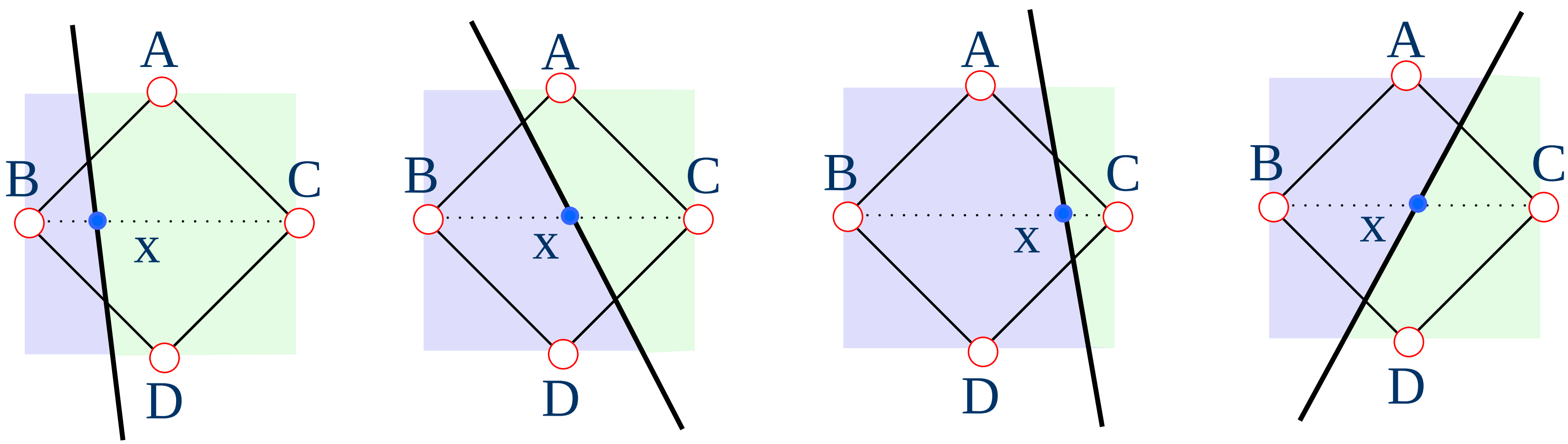
Modélisation, cas des EMRIs

- Cellules vides



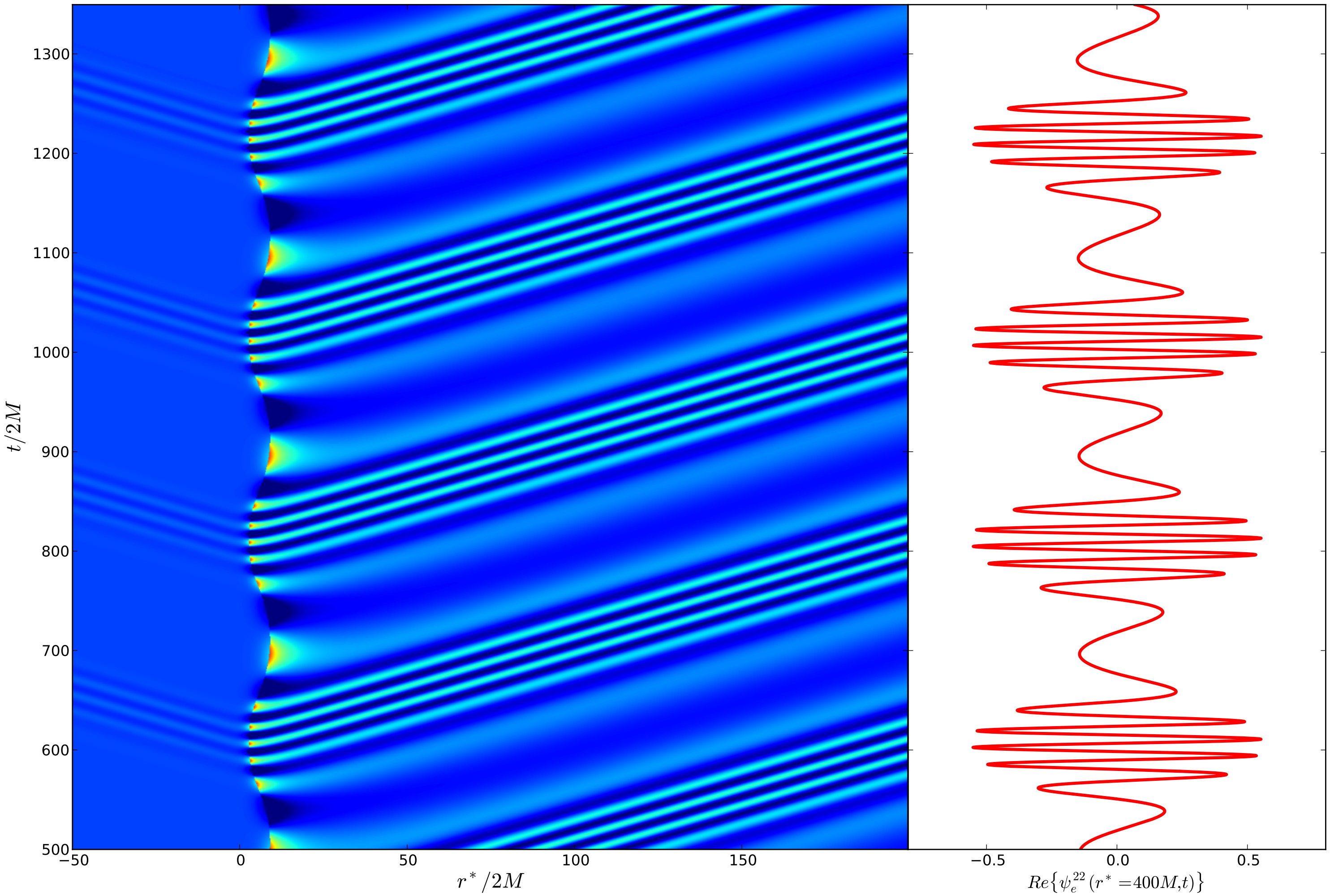
$$\psi_A^{\ell m} = -\psi_D^{\ell m} + \left(\psi_B^{\ell m} + \psi_C^{\ell m}\right)\left(1 - \frac{\Delta r^{*2}}{2} V(r)\right) + O(\Delta r^{*3})$$

- Cellules traversées par la trajectoire = zone de discontinuité de la fonction d'onde



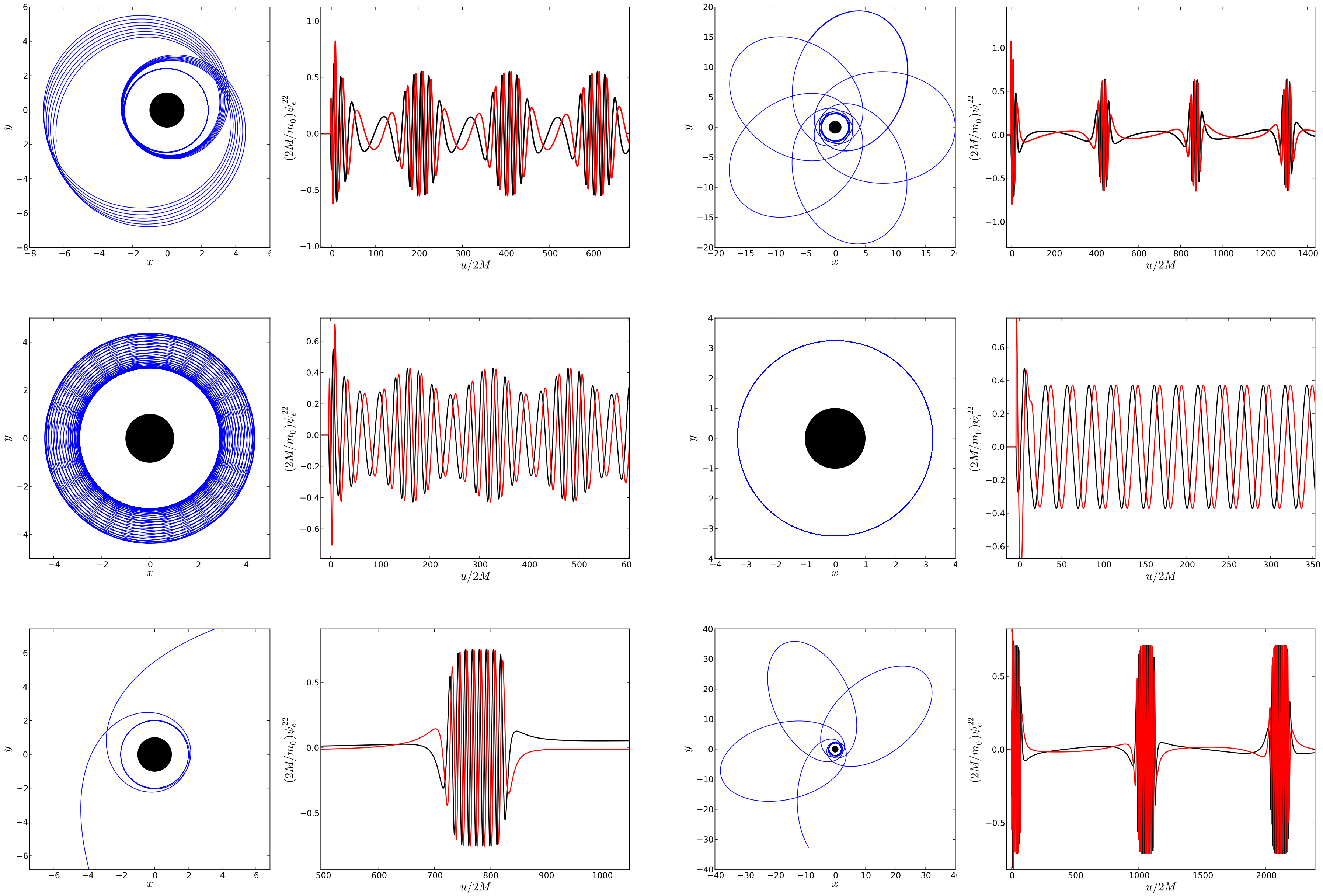
$$\psi_A^{\ell m} = b\psi_B^{\ell m} + c\psi_C^{\ell m} + d\psi_D^{\ell m} + \sum_{p+q<3} \alpha_{pq}\left[\partial_t^p \partial_{r^*}^q \psi_{\mathrm{x}}^{\ell m}\right] + O(\Delta r^{*3})$$

Modélisation, cas des EMRIs



Exemple pour une orbite elliptique $(e = 0.5)$ dans le cas du mode quadrupolaire $(\ell, m) = (2, 2)$

Modélisation, cas des EMRIs



Optimisation du code de calcul

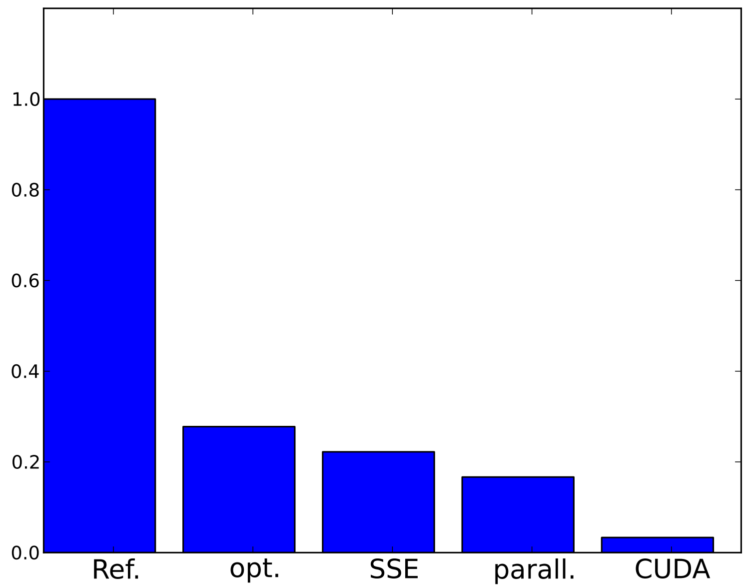
Code en C (lib. GSL pour fonctions spéciales, syst. linéaires, ODE et harmoniques sphériques)

Cas de l'équation homogène (cellules vides).

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}-V(r)^{\ell}\right]\psi^{\ell m}(r,t)=0$$

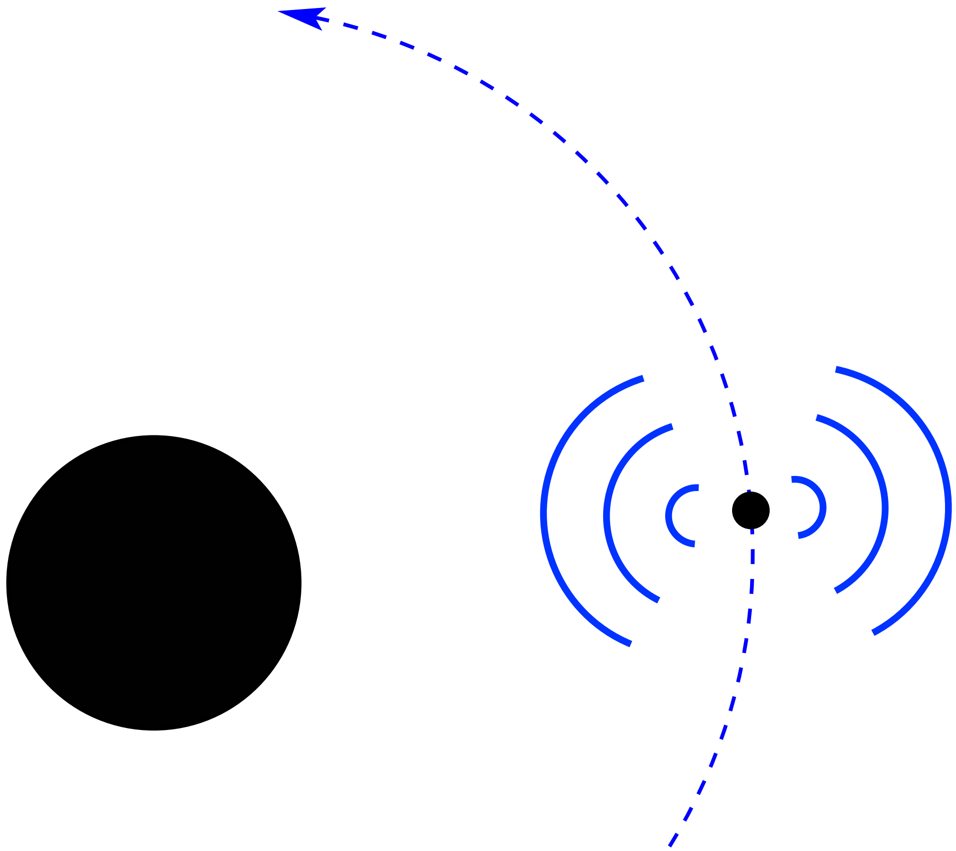
Stages étudiants au LIFO encadrés par S. Jubertie

- version C++
- Optimisation des routines de calcul
- SSE
- Threads Open MP
- CUDA



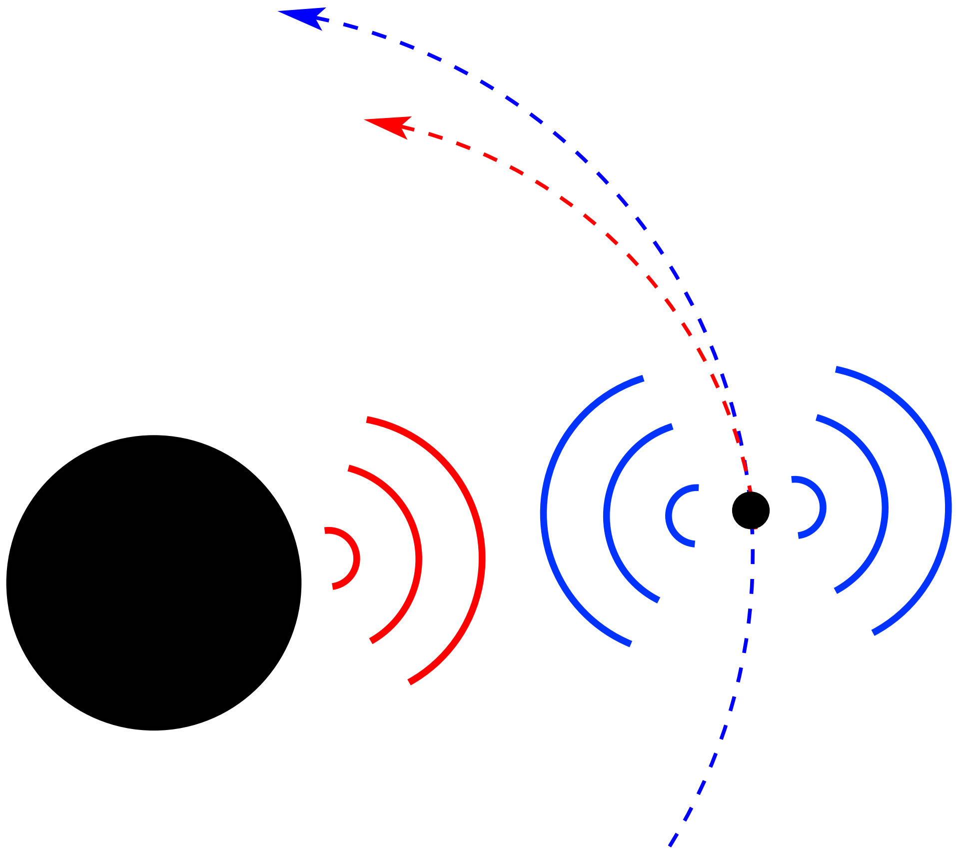
Gain de plus d'un ordre de grandeur en temps de calcul

Réaction de radiation



$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

Réaction de radiation



$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=-\frac{1}{2}\left(g^{\alpha\lambda}+u^\alpha u^\lambda\right)\left(2\nabla_\mu h_{\lambda\nu}-\nabla_\lambda h_{\mu\nu}\right)u^\mu u^\nu$$

CONCLUSION

- Code permettant de générer les formes d'ondes à l'infini (sans réaction de radiation) pour tous types d'orbites.
- Code pour le problème de la chute radiale avec réaction de radiation.

PERSPECTIVES

- Finaliser le travail sur la réaction de radiation.
- Passer à l'évolution orbitale dans le cas d'orbites génériques.
- Jauge harmonique

Merci